2. Tutorium **für 23.10.2020**

(Gruppen 1-4 : Präsenz, Gruppen 5-8 : Online)

2.1 Kronecker-Delta

a) Berechne $x_i y_j \delta_{ji}$ für die Vektoren $\mathbf{x} = (2, 1, 1)$ und $\mathbf{y} = (2, -5, 2)$.

b) Berechne $a_{ij} a_{k\ell} \delta_{j\ell}$ für die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Berechne $\delta_{ii} - \delta_{ij}\delta_{ji}\delta_{kk}$ mit dem Kronecker-Delta in d Dimensionen.

2.2 Lineare Unabhängigkeit

a) Gegeben seien Vektoren

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ a^2 \end{pmatrix}.$$

Schreibe die Bedingung von a an, sodass die Menge der Vektoren $\mathcal{P} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ linear unabhängig ist.

b) Zeige, dass die Menge $\mathcal{Q} = \{\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_1\}$ auch linear unabhängig ist (angenommen, dass P linear unabhängig ist.)

c) Gegeben seien Polynome

$$p_1(x) = x^2 - 2x + 2, \quad p_2(x) = 2x^2 + 1, \quad p_3(x) = 3x - 1\,.$$

Die Menge der Polynomen $\mathcal{F} = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ spannt einen Vektorraum $\mathcal{V}$ auf. Ist die Menge $\mathcal{F}$ linear abhängig oder unabhängig?

2.3 Transformationsmatrix

Ein Vektor $\mathbf{x}$ wird in einer orthonormalen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ durch $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2$ dargestellt.

a) Gegeben seien 2 neue Vektoren $\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + \sqrt{3}\mathbf{e}_2)$ und $\mathbf{e}'_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$. Überprüfe, dass die Vektoren $\{\mathbf{e}'_1,\ \mathbf{e}'_2\}$ linear unabhängig sind. Die Basisvektoren $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ werden in der neuen Basis $\{\mathbf{e}'_1,\ \mathbf{e}'_2\}$ mit $\mathbf{e}_j = \mathbf{e}'_i a_{ij}$ dargestellt. Bestimme die Koordinaten a_{ij}.

b) Berechne die Koordinaten x'_i des Vektors $\mathbf{x}$ in der neuen Basis, wobei $\mathbf{x} = x'_i \mathbf{e}'_i$.

c) Die Transformationsmatrix $\mathbf{T} = t_{ij}$ ist durch $x'_i = t_{ij} x_j$ definiert ($(x_1, x_2) = (1, 2)$). Bestimme die Elemente der Matrix $\mathbf{T}$ und zeige, dass gilt $t_{ij} = a_{ij}$.

Ankreuzbar: 1a-c, 2ab, 2c, 3a, 3bc