2. Tutorium - Lösungen **23.10.2020**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

2.1 Kronecker-Delta

a) $x_i y_j \delta_{ji} = x_i y_i (= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) = 4 - 5 + 2 = 1$
b) $a_{ij} a_{k\ell} \delta_{j\ell} = a_{ij} a_{kj} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)_{ik}$

$$\rightarrow \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \cdots + \delta_{dd} = 1 + 1 + \cdots + 1 = d$,
$\delta_{ij}\delta_{ji}\delta_{kk} = \delta_{ii}\delta_{kk} = dd = d^2$,
$\rightarrow \delta_{ii} - \delta_{ij}\delta_{ji}\delta_{kk} = d - d^2$

2.2 Lineare Unabhängigkeit

a) Lineare Unabhängigkeit : Wenn $c_i \mathbf{f}_i = 0$, muss c_i $(i = 1, 2, 3)$ null sein.

$$c_i \mathbf{f}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = F\mathbf{c} = 0. \quad \text{Wenn } \det F \neq 0,\ \mathbf{c} = F^{-1} 0 = 0.$$

$\rightarrow$ Für die lineare unabhängigkeit muss $\det F$ ungleich null sein.

$$\text{Determinante : } \det F = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix} = 2a^2 - 4a = 2a(a-2)$$

Wenn $a \neq 0, 2$, ist die Menge $\mathcal{P}$ linear unabhängig.

$$\text{b) } \mathbf{f}_1' = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a+1 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_2' = \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ a + a^2 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_3' = \mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 + a^2 \end{pmatrix}.$$

$$c_i \mathbf{f}_i' = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1' & \mathbf{f}_2' & \mathbf{f}_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = F'\mathbf{c} = 0. \quad \text{Wenn } \det F' \neq 0,\ \mathbf{c} = F^{-1} 0 = 0.$$

$$\det F' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1+a & a+a^2 & 1+a^2 \end{vmatrix} = 6(1+a^2) + 3(a+a^2) - 6(1+a) - 5(a+a^2) = -8a + 4a^2 = 4a(a-2)$$

Wenn $\mathcal{P}$ linear unabhängig ist (d.h. $a \neq 0, 2$), ist $\mathcal{Q}$ auch linear unabhängig.
Alternative Lösung:

$$F' = F \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det F' = (\det F) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \det F$$

Wenn $\mathcal{P}$ linear unabhängig ist, gilt $\det F \neq 0$. Deswegen ist $\det F'$ auch nicht null. $\rightarrow$ $\mathcal{Q}$ ist linear unabhängig.
c) Lineare Unabhängigkeit : Wenn $c_i p_i(x) = 0$ für beliebiges x, muss c_i $(i = 1, 2, 3)$ null sein.
$c_i p_i(x) = c_1(x^2 - 2x + 2) + c_2(2x^2 + 1) + c_3(3x - 1) = (c_1 + 2c_2)x^2 + (-2c_1 + 3c_3)x + 2c_1 + c_2 - c_3$
Wenn $c_i p_i(x) = 0$ für beliebiges x, gilt die Bedingungen $c_1 + 2c_2 = 0$, $-2c_1 + 3c_3 = 0$ und $2c_1 + c_2 - c_3 = 0$.

$$\text{oder } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = P\mathbf{c} = 0. \text{ Falls die Inverse } P^{-1} \text{ existiert, } \mathbf{c} = 0$$

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 12 - 3 - 4 = 5 \neq 0$$

Die Inverse P^{-1} existiert und die Menge $\mathcal{F}$ ist linear unabhängig.

2.3 Transformationsmatrix

a) orthonormale Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \to \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$

Die Orthonormalität der Basis $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ (d.h. $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \delta_{ij}$) wird überprüft.

(orthonormale Basis $\to$ linear unabhängig, z.B. $\det(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2) = 0$ wenn $\mathbf{e}_1 \parallel \mathbf{e}_2$ oder $\mathbf{e}_1 = 0$, $\mathbf{e}_2 = 0$.)

Lösung mit Indexschreibweise

Die Basisvektoren werden mit $\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_k s_{ki}$ notiert.

$\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \mathbf{e}_k s_{ki} \cdot \mathbf{e}_\ell s_{\ell j} = s_{ki} s_{\ell j} (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_\ell) = s_{ki} s_{\ell j} \delta_{k\ell} = s_{ki} s_{kj}$

$\mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_1 = s_{11}s_{11} + s_{21}s_{21} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

$\mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}'_2 = s_{12}s_{12} + s_{22}s_{22} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

$\mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}'_1 = s_{11}s_{12} + s_{21}s_{22} = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$

$\to \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \delta_{ij}$ (orthonormale Basis $\to$ linear unabhängig)

Inverse Transformation

$\mathbf{e}'_1 - \sqrt{3}\mathbf{e}'_2 = 2\mathbf{e}_1 , \quad \sqrt{3}\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 = 2\mathbf{e}_2$

$\to \mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}'_1 - \sqrt{3}\mathbf{e}'_2)$ und $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2) \to (a_{ij}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = (s_{ji})$

Lösung mit Matrix-Vektorform

Aus der Angabe $\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} S$

Orthogonalität

$(\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}'^T_1 \\ \mathbf{e}'^T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} SS^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}^T_1 \\ \mathbf{e}^T_2 \end{pmatrix}$

wobei $SS^T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\to (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j) = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = (\delta_{ij})$ (orthogonale Basis $\to$ linear unabhängig)

Inverse Transformation

$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} S \to \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} S^{-1}$

$\to A = (a_{ij}) = S^{-1} = S^T$

alternative Beweis für die lineare Unabhängigkeit

Es wird überprüft, dass gilt $c_i = 0$ wenn $c_i \mathbf{e}'_i = 0$.

$c_i \mathbf{e}'_i = c_i \mathbf{e}_j s_{ji} = 0$.

Weil $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ eine orthonormal Basis ist, ist sie linear unabhängig. $c_i \mathbf{e}_j s_{ji} = 0$ führt zu $c_i s_{ji} = 0$. Wenn die Determinante der Matrix S nicht null ist, $c_i = 0$, d.h. $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ ist auch linear unabhängig.

$\det S = 1/4 + 3/4 = 1 \neq 0$

b) **Lösung mit Indexschreibweise**

$\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}'_1 - \sqrt{3}\mathbf{e}'_2) + 2\frac{1}{2}(\sqrt{3}\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2) = \frac{1}{2}((1 + 2\sqrt{3})\mathbf{e}'_1 + (2 - \sqrt{3})\mathbf{e}'_2)$

Lösung mit Matrix-Vektorform

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} S^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$

c) **Lösung mit Indexschreibweise**

$x'_i = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}_j s_{ji} \cdot \mathbf{x} = s_{ji}(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{x}) = s_{ji} x_j \to t_{ij} = s_{ji} = a_{ij}$

Lösung mit Matrix-Vektorform

$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'^T_1 \\ \mathbf{e}'^T_2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = S^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}^T_1 \\ \mathbf{e}^T_2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = S^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\to T = S^T = A$