3. Tutorium **für 30.10.2019**

(Gruppen 1-4 & 8 : Online, Gruppen 5-7 : Präsenz)

3.1 Levi-Civita Symbol

Das Levi-Civita Symbol:

$$\varepsilon_{ijk\dots} = \begin{cases} +1 & \text{falls} \quad (i,j,k,\cdots) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3,\cdots) \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls} \quad (i,j,k,\cdots) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3,\cdots) \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Gegeben seien zwei Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Berechne $\varepsilon_{ijk} a_j b_k + \delta_{jk} a_i a_j b_k$.

b) Gegeben sei zusätzlich $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechne $\varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$.

c) Berechne $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ij\ell}$ $(1 \leq i,j,k \leq 3)$.

d) Gegeben sei eine 3×3-Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Schreibe mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols die Determinante $\det\mathbf{A}$ in Indexschreibweise.

e) Berechne das Kreuzprodukt $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j$ $(1 \leq i,j \leq 3)$ und schreibe mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols das Ergebnis, wobei

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

f) Schreibe mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols die Determinante $\det(\mathbf{B})$ für die Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k \end{pmatrix}$$

$(1 \leq i,j,k \leq 3)$.

3.2 Duale Basis

Die duale Basis $\{\mathbf{f}_1^*, \mathbf{f}_2^*\} := \{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$ wird über $[\mathbf{f}_i^*, \mathbf{f}_j] = \mathbf{f}_i^* \cdot \mathbf{f}_j = \delta_{ij}$ bzw. $[\mathbf{f}^i, \mathbf{f}_j] = \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_j = \delta^i_j$ definiert. Der Vektor $\mathbf{x} = x'^i \mathbf{f}_i$ wird in der dualen Basis mit $\mathbf{x} = x'_i \mathbf{f}^i$ dargestellt.
a) Finde die dualen Basisvektoren $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$ zu einer orthonormalen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.
b) Die Transformationsmatrix $\mathbf{S} = (s^i{}_j)$ transformiert die orthonormale Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ in die neue Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$, d.h. $\mathbf{f}_j = \mathbf{e}_i s^i{}_j$. Schreibe die Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ für die Basisvektoren $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{f}_2 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ an.
c) Berechne die Koordinaten x'^1 und x'^2 in $\mathbf{x} = x'^i \mathbf{f}_i$ für den Vektor $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$. Schreibe auch die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$, deren Elemente durch $x'^i = t^i{}_j x^j$ definiert sind. (x^1, x^2 sind die Koordinaten in der Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, d.h. $((x^1, x^2) = (1, 2)$.)
d) Bestimme die dualen Basisvektoren $\{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$ zur Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ und schreibe die Transformationsmatrix $\mathbf{S}^*$ an, wobei $\mathbf{f}^i = s^{*i}{}_j \mathbf{e}^j$.
e) Berechne die Koordinaten x'_1 und x'_2 in $\mathbf{x} = x'_i \mathbf{f}^i$. Schreibe auch die Transformationsmatrix $\mathbf{T}^*$ an, wobei $x'_j = x_i t^{*i}{}_j$. (x_1, x_2 sind die Koordinaten in der dualen Basis $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$.)
f) Berechne die Skalarprodukte $\langle \mathbf{f}^i | \mathbf{x} \rangle$ und $\langle \mathbf{f}_i | \mathbf{x} \rangle$ $(i = 1, 2)$ und überprüfe, dass gilt $x'^i = \langle \mathbf{f}^i | \mathbf{x} \rangle$ und $x'_i = \langle \mathbf{f}_i | \mathbf{x} \rangle$.
g) Berechne $x_i x^i$ und $x'_i x'^i$.

Ankreuzbar: 1a-c, 1d-f, 2a-c, 2de, 2fg