3. Tutorium - Lösungen **30.10.2020**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

3.1 Levi-Civita Symbol

a) Zusammenhang zwischen Kreuzprodukt und Levi-Civita Symbol:
$\varepsilon_{ijk}a_j b_k = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})_i$ (z.B. $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$)

$$\varepsilon_{ijk}a_j b_k = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})_i = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\right)_i = \begin{pmatrix}4\\2\\-8\end{pmatrix}_i$$

$\delta_{jk}a_i a_j b_k = a_i a_j b_j = a_i(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = a_i(3-4+1) = 0$

$$\varepsilon_{ijk}a_j b_k + \delta_{jk}a_i a_j b_k = \begin{pmatrix}4\\2\\-8\end{pmatrix}_i$$

b) $\varepsilon_{ijk}a_i b_j c_k = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})_k c_k = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} \ = 4+2-8 = -2$
Bemerkung : $\varepsilon_{ijk}a_i b_j c_k = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a} = (\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}$
$\varepsilon_{ijk}a_i b_j c_k$ ist das Volumen des durch 3 Vektoren $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ aufgespannten Parallelepipedes
c) Wenn $k\neq\ell$, gilt $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ij\ell} = 0$
(z.B Für $k=3$, $\varepsilon_{ijk}\neq 0$ wenn $(i,j)=(1,2)$ oder $(2,1)$. Falls auch $\varepsilon_{ij\ell}\neq 0$, muss ℓ gleich 3 sein.)
Wenn $k=\ell$, $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ij\ell} = \sum_{i,j\neq k} \underbrace{\varepsilon_{ij\underline{k}}\varepsilon_{ij\underline{k}}}_{\text{ohne Summe über } k} = \sum_{i,j\neq k} 1 = 2$
Zusammenfassend $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ij\ell} = 2\delta_{k\ell}$
d) $\det\mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$
$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{21}(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$
$= \varepsilon_{1jk}a_{11}a_{j2}a_{k3} + \varepsilon_{2jk}a_{21}a_{j2}a_{k3} + \varepsilon_{3jk}a_{31}a_{j2}a_{k3} = \varepsilon_{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3}$ $(= (\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\cdot\mathbf{a}_3)$

$$\text{Alternative Lösung : }\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{vmatrix}$$

$= a_{11}\varepsilon_{1jk}a_{j2}a_{k3} - a_{21}(-\varepsilon_{2jk}a_{j2}a_{k3}) + a_{31}\varepsilon_{3jk}a_{j2}a_{k3} = \varepsilon_{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3}$
Bemerkung : Wenn $\det\mathbf{A} = 0$, ist das Volumen des durch 3 Vektoren $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ aufgespannten Parallelepipedes gleich null. $\rightarrow$ Die Vektoren sind linear abhängig.
Bemerkung 2: $\det\mathbf{A} = \det\mathbf{A}^T \rightarrow \det\mathbf{A} = \varepsilon_{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3} = \varepsilon_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k}$
e) Für das Rechtssystem, $\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k$.
z.B. $\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2 = (0,0,1)^T = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3 = (0,-1,0)^T = -\mathbf{e}_2$, ...
f) $\det\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2)\cdot\mathbf{b}_3 = (\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j)\cdot\mathbf{e}_k = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_k = \varepsilon_{ijk}$
Alternative Lösung :
Vektoren in Indexschreibweise : $\mathbf{e}_1 = (\delta_{1m})$, $\mathbf{e}_2 = (\delta_{2m})$, $\mathbf{e}_3 = (\delta_{3m})$, $\rightarrow$ $\mathbf{e}_i = (\delta_{im})$, $\mathbf{e}_j = (\delta_{jm})$, $\mathbf{e}_k = (\delta_{km})$,
Matrix $\mathbf{B}$ in Indexschreibweise : $B = (b_{mn})$
$\rightarrow (b_{m1}) = \mathbf{e}_i = (\delta_{im})$, $(b_{m2}) = \mathbf{e}_j = (\delta_{jm})$, und $(b_{m3}) = \mathbf{e}_k = (\delta_{km})$,
Determinante : $\det\mathbf{B} = \varepsilon_{mn\ell}b_{m1}b_{n2}b_{\ell 3} = \varepsilon_{mn\ell}\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{k\ell} = \varepsilon_{ijk}$

3.2 Duale Basis

a) Orthonormale Basis : $\mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$
Die duale Basis erfüllt die gleiche Bedingung $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta^i_j$. $\to$ Vergleich : $\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i^T$

b) $\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{x}$ in der orthonormalen Basis : $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$
$\mathbf{x}$ in der neuen Basis : $\mathbf{x} = x'^i \mathbf{f}_i$, Ersetzen durch $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_j s^j{}_i$: $\mathbf{x} = x'^i s^j{}_i \mathbf{e}_j$
Vergleich mit $\mathbf{x} = x^j \mathbf{e}_j$: $x^j = s^j{}_i x'^i$,
Inverse der Transformation : $x'^i = (\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S})^i{}_k x'^k = (\mathbf{S}^{-1})^i{}_j s^j{}_k x'^k = (\mathbf{S}^{-1})^i{}_j x^j$,
Transformationsmatrix : $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
neue Koordinaten $\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

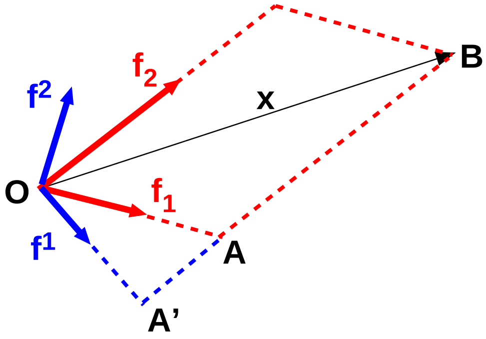
d) Orthonormalität der dualen Basis : $\mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_j = \delta^i_j$
Ersetzen durch $\mathbf{f}_j = \mathbf{e}_i s^i{}_j$ und $\mathbf{f}^i = s^{*i}{}_j \mathbf{e}^j$: $\mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_j = s^{*i}{}_k \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_\ell s^\ell{}_j = s^{*i}{}_k s^\ell{}_j (\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_\ell) = s^{*i}{}_k s^\ell{}_j \delta^k_\ell = s^{*i}{}_k s^k{}_j = \delta^i_j$
$\mathbf{S}^*$ ist die Inverse von $\mathbf{S} \to \mathbf{S}^* = \mathbf{T} \to \mathbf{f}^1 = (1/3)\mathbf{e}^1 - (2/3)\mathbf{e}^2$, $\mathbf{f}^2 = (1/3)\mathbf{e}^1 + (1/3)\mathbf{e}^2$,

e) $\mathbf{x}$ in der orthonormalen und dualen Basis : $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}^i$
$\mathbf{x}$ in der neuen Basis : $\mathbf{x} = x'_i \mathbf{f}^i$, Ersetzen durch $\mathbf{f}^i = s^{*i}{}_j \mathbf{e}^j$: $\mathbf{x} = x'_i s^{*i}{}_j \mathbf{e}^j$
Vergleich mit $\mathbf{x} = x_j \mathbf{e}^j$: $x_j = x'_i s^{*i}{}_j$, Inverse der Transformation : $x'_i = x_j (\mathbf{S}^{*-1})^j{}_i$,
Transformationsmatrix : $\mathbf{T}^* = \mathbf{S}^{*-1} = \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
neue Koordinaten $\begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \end{pmatrix}$

f) $\mathbf{f}^i \cdot \mathbf{x} = \mathbf{f}^i \cdot x'^j \mathbf{f}_j = x'^j \delta^i_j = x'^i$, $\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{x} = \mathbf{f}_i \cdot x'_j \mathbf{f}^j = x'_j \delta^j_i = x'_i$
Hinweis:
Die **ko**varianten Koordinaten x_i werden mit dem **gleichen** Transformationsmatrix wie die Basistransformation transformiert (d.h. $\mathbf{T}^* = \mathbf{S}$) und sind die Projektion auf den Basisvektor $x_i = \langle \mathbf{f}_i | \mathbf{x} \rangle$.
Die **kontra**varianten Koordinaten x^i werden mit dem **inversen** Transformationsmatrix der Basistransformation transformiert (d.h. $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$) und sind die Projektion auf den Basisvektor im dualen Raum $x^i = \langle \mathbf{f}^i | \mathbf{x} \rangle$.
Bemerkung :
$\mathbf{x} = \mathbf{f}_i (\underbrace{\mathbf{f}^i \cdot \mathbf{x}}_{=x^i}) \to \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^i (= |\mathbf{f}_i\rangle\langle \mathbf{f}^i|) = \mathbf{I}$ ist ein Einheitsoperator. Die Transformationsmatrix wird von diesen Einheitsoperatoren gebildet.
z.B. $\mathbf{f}_i = (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^j)\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_j (\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{f}_i) = \mathbf{e}_j s^j{}_i$ und $\mathbf{e}_i = (\mathbf{f}_j \otimes \mathbf{f}^j)\mathbf{e}_i = \mathbf{f}_j (\mathbf{f}^j \cdot \mathbf{e}_i) = \mathbf{f}_j t^j{}_i$,
$\to s^j{}_i t^i{}_k = (\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{f}_i)(\mathbf{f}^i \cdot \mathbf{e}_k) = \mathbf{e}^j \cdot \underbrace{\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^i}_{=\mathbf{I}} \cdot \mathbf{e}_k = \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_k = \delta^j_k \to \mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$
$x'^i = \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{x} = \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{x} = t^i{}_j x^j$

g) $x_i x^i = 1 + 4 = 5$, $x'_i x'^i = 1 + 4 = 5$
Bemerkung : Länge der Vektors $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_i x^i} = \sqrt{x'_i x'^i}$ (unabhängig von der Basis)

graphischer Hinweis der dualen Basis :



- Der Vektor $\mathbf{x} = x^i \mathbf{f}_i$ bildet ein Parallelogramm $OABC$.
- Der Winkel $\alpha = \angle AOA' \to \mathbf{f}^1 \cdot \mathbf{f}_1 = |\mathbf{f}^1||\mathbf{f}_1| \cos\alpha$.
  Da $\mathbf{f}^1 \cdot \mathbf{f}_1 = 1$, $\cos\alpha = 1/(|\mathbf{f}^1||\mathbf{f}_1|)$
- $\overline{OA'}$ ist eine Orthogonalprojektion von $\mathbf{x}$ zum Vektor $\mathbf{f}^1$, d.h. $\overline{OA'} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}^1 / |\mathbf{f}^1|$.
- $\overline{OA} = \overline{OA'} / \cos\alpha = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{f}^1)|\mathbf{f}_1|$ oder $\overrightarrow{OA} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{f}^1)\mathbf{f}_1$
- In ähnlicher Weise $\overrightarrow{OC} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{f}^2)\mathbf{f}_2$