4. Tutorium **für 6.11.2020**
(Gruppen 1-4 : Präsenz, Gruppen 5-8 : Online)

4.1 Levi-Civita Symbol (II)

a) Zeige für eine 3×3 Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$, dass gilt

$$\varepsilon_{\ell mn} a_{\ell i} a_{mj} a_{nk} = \varepsilon_{ijk} \mathrm{det}\mathbf{A}$$

b) Zeige mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols, dass gilt

$$\mathrm{det}(\mathbf{AB}) = (\mathrm{det}\mathbf{A})(\mathrm{det}\mathbf{B})$$

für 3×3 Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$.
c) Zeige $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$. (Einsteinsche Summenkonvention beachten).

4.2 Orthogonalprojektion

a) Gegeben sei ein Vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Wie lautet der zugehörigen Projektor $\mathbf{E_x}$ in der Matrix-Form?
b) Berechne $(\mathbf{E_x})^n$.
c) Berechne $(\mathbf{I} - \mathbf{E_x})(\mathbf{I} + \mathbf{E_x})^2\mathbf{x}$.

4.3 Differentialoperatoren

Ein 3-dimensionaler Vektor sei mit $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ in der Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ dargestellt.
a) Berechne für $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ den Ausdruck $\partial_i(x_i x_k x_k)$.
b) Berechne $\mathrm{grad}\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}$.
c) Berechne $\mathrm{rot}(\mathbf{p} \times \mathbf{x})$, wobei $\mathbf{p} = p_i \mathbf{e}_i$ ein konstanter Vektor ist.

4.4 Spektraltheorem

a) Schreibe die gekoppelten linearen Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{4}{3}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{3}x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2$$

in die Matrix-Vektorform $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{A}\mathbf{x}$ um, wobei $\mathbf{A}$ eine 2×2 Matrix ist und $\mathbf{x} = (x_1 \quad x_2)^T$. Berechne die Eigenwerte λ_1, λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$) und die normierten Eigenvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ der Matrix $\mathbf{A}$.
b) $\mathbf{E}_i$ sei der Projektor zum Vektor $\mathbf{e}_i$. Schreibe die Projektoren $\mathbf{E}_1$ und $\mathbf{E}_2$ im Matrixform an und zeige $\mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{E}_i$.
c) Stelle die Differentialgleichungen nach $x_1'(t) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1$ und $x_2'(t) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2$ um und löse die Gleichungen.
d) Zeige, dass die Lösung der Differentialgleichung durch $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$ gegeben wird, wobei $e^{\mathbf{A}t} = e^{\lambda_i}\mathbf{E}_i$.

Ankreuzbar: 1a-c, 2a-c, 3a-c, 4ab, 4cd