4. Tutorium - Lösungen **6.11.2020**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

4.1 Levi-Civita Symbol (II)

a)
$$\varepsilon_{\ell mn}a_{\ell i}a_{mj}a_{nk} = \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} & a_{1k} \\ a_{2i} & a_{2j} & a_{2k} \\ a_{3i} & a_{3j} & a_{3k} \end{vmatrix}$$
Falls (i,j,k) eine gerade Permutation von (1,2,3) ist: z.B. $\varepsilon_{\ell mn}a_{\ell 3}a_{m1}a_{n2} = \varepsilon_{\ell mn}a_{m1}a_{n2}a_{\ell 3}$
(m,n,ℓ) ist auch eine gerade Permutation von (ℓ,m,n),
d.h. $\varepsilon_{\ell mn} = \varepsilon_{mn\ell}$. $\varepsilon_{\ell mn}a_{\ell 3}a_{m1}a_{n2} = \varepsilon_{mn\ell}a_{m1}a_{n2}a_{\ell 3} = \det\mathbf{A}$

Falls (i,j,k) eine ungerade Permutation von (1,2,3) ist: z.B. $\varepsilon_{\ell mn}a_{\ell 2}a_{m1}a_{n3} = \varepsilon_{\ell mn}a_{m1}a_{\ell 2}a_{n3}$
(m,ℓ,n) ist auch eine ungerade Permutation von (ℓ,m,n),
d.h. $\varepsilon_{\ell mn} = -\varepsilon_{m\ell n}$. $\varepsilon_{\ell mn}a_{\ell 2}a_{m1}a_{n3} = -\varepsilon_{m\ell n}a_{m1}a_{\ell 2}a_{n3} = -\det\mathbf{A}$

Falls $i=j$, $j=k$, oder $k=\ell$, $\varepsilon_{\ell mn}a_{\ell i}a_{mj}a_{nk} = 0$

Zusammenfassend $\varepsilon_{\ell mn}a_{\ell i}a_{mj}a_{nk} = \varepsilon_{ijk}\det\mathbf{A}$
b) $\det\mathbf{AB} = \varepsilon_{ijk}(\mathbf{AB})_{i1}(\mathbf{AB})_{j2}(\mathbf{AB})_{k3} = \varepsilon_{ijk}a_{i\ell}b_{\ell 1}a_{jm}b_{m2}a_{kn}b_{n3} = \underbrace{(\varepsilon_{ijk}a_{i\ell}a_{jm}a_{kn})}_{=\varepsilon_{\ell mn}\det\mathbf{A}}b_{\ell 1}b_{m2}b_{n3}$
$= \varepsilon_{\ell mn}(\det\mathbf{A})b_{\ell 1}b_{m2}b_{n3} = (\det\mathbf{A})(\det\mathbf{B})$
c) Standard basis : $\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \delta_{3i} \end{pmatrix}$
$\det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijk}$ (siehe Bsp.3.1f)
$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{k\ell m} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_k & \mathbf{e}_\ell & \mathbf{e}_m \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k \end{pmatrix}^T\det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_k & \mathbf{e}_\ell & \mathbf{e}_m \end{pmatrix}$
$= \det\left(\begin{pmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} \mathbf{e}_k & \mathbf{e}_\ell & \mathbf{e}_m \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{i\ell} & \delta_{im} \\ \delta_{jk} & \delta_{j\ell} & \delta_{jm} \\ 1 & \delta_{k\ell} & \delta_{km} \end{vmatrix}$
$= \delta_{ik}\delta_{j\ell}\delta_{km} + \delta_{jk}\delta_{k\ell}\delta_{im} + \delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{j\ell}\delta_{im} - \delta_{ik}\delta_{k\ell}\delta_{jm} - \delta_{jk}\delta_{i\ell}\delta_{km}$
$= \delta_{im}\delta_{j\ell} + \delta_{j\ell}\delta_{im} + \delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{j\ell}\delta_{im} - \delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{jm}\delta_{i\ell} = \delta_{im}\delta_{j\ell} - \delta_{i\ell}\delta_{jm}$
Alternative Lösung:
i) Wenn $i=j$: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = 0$. $\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = \delta_{il}\delta_{im} - \delta_{im}\delta_{il}$ (ohne Summe über i)
Wenn $l=m=i$, $\delta_{il}\delta_{im} - \delta_{im}\delta_{il} = 1-1 = 0$ und sonst, $\delta_{il}\delta_{im} - \delta_{im}\delta_{il} = 0-0 = 0$
ii) Wenn $i \neq j$: In der Summe über k trägt $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}$ nur 1 Term ($k \neq i$ und $k \neq j$) bei.
ii-a) Wenn $l=i$ und $m=j$ (z.B. $i=l=1$, $j=m=2$, $k=3$): $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 1$
$\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = \delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji} = 1$ (ohne Einsteinsche Summenkonvention)
ii-b) Wenn $l=j$ und $m=i$ (z.B. $i=m=1$, $j=l=2$, $k=3$): $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = -1$
$\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = \delta_{ij}\delta_{ji} - \delta_{ii}\delta_{jj} = -1$ (ohne Einsteinsche Summenkonvention)
ii-c) Sonst ($l=m$ und/oder $l=k$ und/oder $m=k$): $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = 0$ und $\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = 0$

4.2 Orthogonalprojektion

a) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\mathbf{E}_x = \frac{\mathbf{x}\otimes\mathbf{x}^T}{\langle\mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle} = \frac{1}{(-1)^2+1^2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
b) $\mathbf{E}_\mathbf{x}^2 = \frac{1}{2^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_\mathbf{x}$.

$\mathbf{E}_\mathbf{x}^n = \mathbf{E}_\mathbf{x}^{n-2}\mathbf{E}_\mathbf{x}^2 = \mathbf{E}_\mathbf{x}^{n-2}\mathbf{E}_\mathbf{x} = \mathbf{E}_\mathbf{x}^{n-1} = \cdots = \mathbf{E}_\mathbf{x}^{n-2} = \cdots = \mathbf{E}_\mathbf{x}$
c) Eigenschaft des Projektors: $\mathbf{E}_\mathbf{x}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ (nachrechnen!)
$(\mathbf{1} - \mathbf{E}_\mathbf{x})(\mathbf{1} + \mathbf{E}_\mathbf{x})^2 \mathbf{x} = (\mathbf{1} - \mathbf{E}_\mathbf{x})(\mathbf{1} + \mathbf{E}_\mathbf{x}) \underbrace{(\mathbf{1} + \mathbf{E}_\mathbf{x})\mathbf{x}}_{\mathbf{x}+\mathbf{x}=2\mathbf{x}} = (\mathbf{1} - \mathbf{E}_\mathbf{x}) \underbrace{(\mathbf{1} + \mathbf{E}_\mathbf{x}) 2\mathbf{x}}_{2\mathbf{x}+2\mathbf{x}=4\mathbf{x}} = \underbrace{(\mathbf{1} - \mathbf{E}_\mathbf{x}) 4\mathbf{x}}_{4\mathbf{x}-4\mathbf{x}=0} = 0$

4.3 Differentialoperatoren

a) $(\partial_i x_i x_k x_k) = \delta_{ii} x_k x_k + x_i \delta_{ik} x_k + x_i x_k \delta_{ik} = 3x_k x_k + x_k x_k + x_k x_k = 5x_k x_k$
b) $\partial_i (x_k x_k)^{-1} = -(x_k x_k)^{-2} \partial_i (x_j x_j) = -(x_k x_k)^{-2} 2\delta_{ij} x_j = -2x_i (x_k x_k)^{-2}$
c) $(\mathrm{rot}(\mathbf{p} \times \mathbf{x}))_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j (\mathbf{p} \times \mathbf{x})_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j (p_\ell \mathbf{e}_\ell \times x_m \mathbf{e}_m)_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j (p_\ell x_m \varepsilon_{\ell mn} \mathbf{e}_n)_k = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{\ell mn} p_\ell (\partial_j x_m)(\mathbf{e}_n)_k$
$= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{\ell mn} p_\ell \delta_{jm} \delta_{kn} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{\ell jk} p_\ell = 2\delta_{i\ell} p_\ell = 2p_i \to \mathrm{rot}(\mathbf{p} \times \mathbf{x}) = 2\mathbf{p}$

4.4 Spektraltheorem

a) $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \mathbf{A} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 5 \end{pmatrix}$
Säkulardeterminante :
$\det(a_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = \det \begin{vmatrix} 4/3 - \lambda & \sqrt{2}/3 \\ \sqrt{2}/3 & 5/3 - \lambda \end{vmatrix} = (4/3 - \lambda)(5/3 - \lambda) - 2/9 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$
$\to \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1$
Eigenvektoren : $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4a + \sqrt{2}b \\ \sqrt{2}a + 5b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
$\to (4a + \sqrt{2}b)b - (\sqrt{2}a + 5b)a = -ab + \sqrt{2}b^2 - \sqrt{2}a^2 = (\sqrt{2}b + a)(b - \sqrt{2}a) = 0 \to b = \sqrt{2}a$ oder $a = -\sqrt{2b}$
Wenn $b = \sqrt{2}a$, $\begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2\sqrt{2}a \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
Da der Eigenwert $\lambda_1 = 2$ und der normierte Eigenvektor $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$
Wenn $a = -\sqrt{2}b$, $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
Da der Eigenwert $\lambda_2 = 1$ und der Eigenvektor $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$
b) $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$. $\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1^T}{|\mathbf{e}_1|^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$.
$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. $\mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2^T}{|\mathbf{e}_2|^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.
$\lambda_i \mathbf{E}_i = 2\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 5 \end{pmatrix}$
c) $\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_i \mathbf{E}_i \mathbf{x}$
$\frac{dx'_j}{dt} = \frac{d}{dt}\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}_j \lambda_i \mathbf{E}_i \mathbf{x} = \sum_i \mathbf{e}_j \lambda_i (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i)\mathbf{x} = \sum_i \lambda_i (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x}) = \sum_i \lambda_i \delta_{ij} x'_i = \lambda_j x'_j$
$x'_j(t) = e^{\lambda_j t} x'_j(0) \to x'_1(t) = e^{2t} x'_1(0)\ x'_2(t) = e^t x'_2(0)$
d) $\mathbf{x}(t) = x'_i(t)\mathbf{e}_i = e^{2t} x'_1(0)\mathbf{e}_1 + e^t x'_2(0)\mathbf{e}_2 = e^{2t}\mathbf{E}_1\mathbf{x}(0) + e^t \mathbf{E}_2 \mathbf{x}(0) = (e^{2t}\mathbf{E}_1 + e^t \mathbf{E}_2)\mathbf{x}(0) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$
Bemerkung :
Für eine selbstadjungierte Matrix $\mathbf{A}$ (oder eine reelle symmetrische Matrix) bildet die Eigenvektoren eine orthogonale Basis und $\mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{E}_i$ wobei $\mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i^T}{|\mathbf{e}_i|^2} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^i$.
Für eine allgemeine aber diagonalisierbare Matrix $\mathbf{A}$ bildet die rechten eigenvektoren $\mathbf{f}_i$ eine nicht-orthogonale Basis und die linken eigenvektoren $\mathbf{f}^i$ die duale Basis (wenn die Vektoren richtig normiert). Die Matrix wird mit $\mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{P}_i$ dargestellt, wobei $\mathbf{P}_i = \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^i$.
Beweis : $\sum_i \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^i = \mathbf{I}$ ist ein Einheitsoperator.
$\mathbf{A} = (\sum_i \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^i) \cdot \mathbf{A} \cdot (\sum_j \mathbf{f}_j \otimes \mathbf{f}^j) = \sum_{i,j} (\mathbf{f}^i \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{f}_j) \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^j = \sum_{i,j} \lambda_j \delta^i_j \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^j = \sum_i \lambda_i \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^i$