5. Tutorium **für 13.11.2020**

(Gruppen 1-8 : Online)

5.1 Tensoren

Die Komponenten eines kontravarianten Tensors zweiter Stufe A bezüglich der Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ lauten

$$(a^{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} .$$

a) Wie lauten die Komponenten a_{ij} bezüglich der dualen Basis zur Standardbasis?

b) Wie lauten die Komponenten a'^{ij} des Tensors A bezüglich der nicht-orthogonalen Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ wobei die Basisvektoren durch

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

definiert sind?

c) Berechne die Basisvektoren $\mathbf{f}^i$ im dualen Raum.

d) Berechne die Elemente der metrischen Tensoren, g'_{ij} und g'^{ij}, für die nicht-orthogonalen Basis.

e) Berechne die Komponenten $a'^i{}_j$ und a'^j_i in der gemischten Darstellung zwischen der nicht-orthogonalen Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ und der dualen Basis $\{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$.

f) Berechne die Komponenten des Tensors A^n (n: ganzzahliger Exponent) bezüglich der Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

5.2 Lokale Transformation

Betrachte eine Transformation zwischen kartesischen Koordinaten $(x^1, x^2) = (x, y)$ und elliptischen Koordinaten $(x'^1, x'^2) = (u, v)$, die durch

$$x^1 = x(u,v) = \cosh u \, \cos v, \;\; x^2 = y(u,v) = \sinh u \, \sin v \qquad (0 \leq u < \infty \, , \, 0 \leq v \leq 2\pi)$$

definiert ist. Im elliptischen Koordinatensystem sind die Basisvektoren lokal definiert, d.h. die Richtung und Länge der Basisvektoren sind ortsabhängig.

a) Die infinitesimale Änderung $\mathbf{dx} = dx^i \mathbf{e}_i$ im kartesischen Koordinatensystem wird im elliptischen Koordinatensystem mit $\mathbf{dx} = dx'^i \mathbf{e}'_i$ dargestellt. Berechne die Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ der Basisvektoren, wobei

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S}$$

($\mathbf{e}_i$ und $\mathbf{e}'_i$ seien Spaltenvektoren.)

b) Zeichne in der xy-Ebene eine Kurve C_1 mit $u = \ln 2$ und $0 \leq v \leq 2\pi$ und eine andere C_2 mit $0 \leq u < \infty$ und $v = \pi/4$. Skizziere auch die Basisvektoren $\mathbf{e}'_1$ und $\mathbf{e}'_2$ auf dem Schnittpunkt $(u, v) = (\ln 2, \pi/4)$.
c) Berechne die Elemente der metrischen Tensoren, g'_{ij} und g'^{ij}, der elliptischen Koordinaten.
d) Zeige dass die Umfangslänge L der Kurve C_1 durch

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{9}{16} + \sin^2 v}\, dv$$

gegeben ist.

Ankreuzbar: 1a-c, 1de, 1f, 2ab, 2cd