5. Tutorium - Lösungen **13.11.2020**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel zu rechnen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

5.1 Tensoren

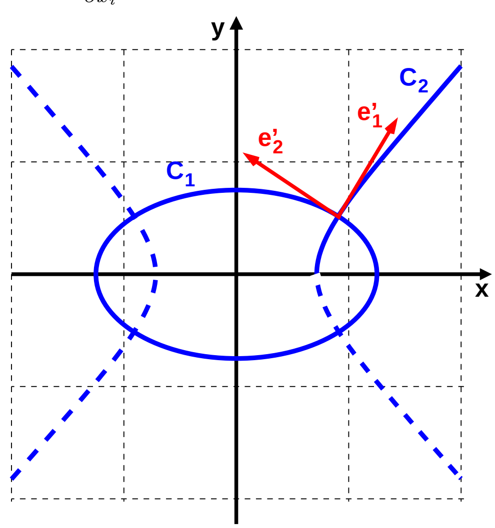
a) In der Standardbasis ist die Summe der Projektoren $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_i = \mathbf{I}$ die Einheitsmatrix.
Die Entwicklung des Tensors mit der Standardbasis ist $A = \mathbf{e}_i \otimes \underbrace{\mathbf{e}^i \cdot A \cdot \mathbf{e}^j}_{=a^{ij}} \otimes \mathbf{e}_j = a^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$

Für orthonormale Basen ist der metrische Tensor die Einheitsmatrix : $g_{ij} = g^{ij} = \delta_{ij}$.
$\rightarrow$ Die dualen Vektoren ist gleich die ursprünglichen Basisvektoren : $\mathbf{e}^i = g^{ij}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i$
Tensor A in der dualen Basis : $\mathbf{A} = a^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = a^{ij}\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \equiv a_{ij}\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$
$\rightarrow a_{ij} = a^{ij} \rightarrow (a_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
Anmerkung : Im Skriptum ist eine Element eines Tensors zweiter Stufe, z.B. $a^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot A \cdot \mathbf{e}^j$, mit einer bilinearen Funktion $a^{ij} = \alpha(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j)$ bezeichnet. Für Tensoren höherer Stufe ist die Notation wie $\mathbf{e}^i \cdot A \cdot \mathbf{e}^j$ nicht mehr möglich und wird mit einer allgemeinen multilinearen Funktion $a^{ijk\cdots} = \alpha(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j, \mathbf{e}^k, \cdots)$ bezeichnet. Statt einer Element ist der Tensor mit $A = a^{ijk\cdots}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \cdots$ bezeichnet.
b) Die Transformationsmatrix $\mathbf{S} = (s^i{}_j) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} : \mathbf{f}_j = \mathbf{e}_i s^i{}_j$
Inverse Transformation : $\mathbf{e}_j = \mathbf{f}_i t^i{}_j$ wobei $\mathbf{T} = (t^i{}_j) = \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathbf{A} = a^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = a^{ij}(\mathbf{f}_k t^k{}_i) \otimes (\mathbf{f}_\ell t^\ell{}_j) = a^{ij} t^k{}_i t^\ell{}_j \mathbf{f}_k \otimes \mathbf{f}_\ell \equiv a'^{k\ell}\mathbf{f}_k \otimes \mathbf{f}_\ell$
$\rightarrow (a'^{k\ell}) = t^k{}_i a^{ij} t^\ell{}_j = \mathbf{T}(a^{ij})\mathbf{T}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$
c) Orthogonalität : $\begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$
$\rightarrow$ Die dualen Vektoren sind die Inverse der ursprünglichen Basisvektoren : $\begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix}^{-1}$
$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}\mathbf{S} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix}^{-1} = \mathbf{S}^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}^{-1} = \mathbf{T}\begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix}$
$\mathbf{f}^1 = 3\mathbf{e}^1 + 2\mathbf{e}^3$, $\mathbf{f}^2 = \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}^3$
d) $(g'_{ij}) = (\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}$, $(g'^{ij}) = (\mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}^j) = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
Anmerkung : $\mathbf{g}'^*\mathbf{g}' = (\mathbf{T}\mathbf{T}^T)(\mathbf{S}^T\mathbf{S}) = \mathbf{T}\underbrace{\mathbf{T}^T\mathbf{S}^T}_{=1}\mathbf{S} = \mathbf{T}\mathbf{S} = 1$
(Überprüfe die Gleichung mit den metrischen Tensoren aus (d).)
e) $\mathbf{A} = a'^{ij}\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}_j = a'^{ij}\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}_j \cdot \underbrace{\mathbf{f}_\ell \otimes \mathbf{f}^\ell}_{=\mathbf{I}} = a'^{ij} g'_{j\ell}\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^\ell \equiv a'^i{}_\ell \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^\ell$
$(a'^i{}_\ell) = (a'^{ij})\mathbf{g}' = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
In ähnlicher Weise $(a'_i{}^\ell) = \mathbf{g}'(a'^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & -10 \\ 65 & 27 \end{pmatrix}$
Anmerkung 1 : $(\mathbf{A}^T)_j{}^i = a'^i{}_j \neq a'_j{}^i$ oder $\begin{pmatrix} a'^1{}_1 & a'^1{}_2 \\ a'^2{}_1 & a'^2{}_2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a'^1{}_1 & a'^2{}_1 \\ a'^1{}_2 & a'^2{}_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a'_1{}^1 & a'_1{}^2 \\ a'_2{}^1 & a'_2{}^2 \end{pmatrix}$

Anmerkung 2 : $\mathbf{f}_i$ ist ein Rechtseigenvektor des Tensors A, d.h. $A \cdot \mathbf{f}_i = \lambda_i \mathbf{f}_i$ (ohne Summe über i) und $\mathbf{f}^i$ ist ein Linkseigenvektor des Tensors A, d.h. $\mathbf{f}^i \cdot A = \lambda^i \mathbf{f}_i$ (ohne Summe über i) (überprüfen!)
Anmerkung 3 : Für $A = a'^{ij}\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}_j$
Eigenwertgleuchung : $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \to (a'^{ij}\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}_j) \cdot (x_k \mathbf{f}^k) = \lambda(x_k \mathbf{f}^k) \to a'^{ij}x_j \mathbf{f}_i = \lambda x_k g^{ik}\mathbf{f}_i \to a'^{ij}x_j = \lambda x_k g^{ik}$
$\to \begin{pmatrix} a'^{11} & a'^{12} \\ a'^{21} & a'^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ (verallgemeinertes Eigenwertproblem)
f) Aus (e) $\mathbf{A} = a'^i{}_\ell \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^\ell = \mathbf{f}_1 \otimes \mathbf{f}^1 + 2\mathbf{f}_2 \otimes \mathbf{f}^2 \equiv \sum_i \lambda_i \mathbf{P}_i$ mit $\mathbf{P}_i = \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^i$ und $\lambda_{1,2} = 1, 2$.
Weil $\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_j = \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_j \otimes \mathbf{f}^j = \delta^i_j \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^j = \delta^i_j \mathbf{P}_i$ (ohne Summe über i, j)
$\mathbf{A}^2 = (\sum_i \lambda_i \mathbf{P}_i)(\sum_j \lambda_j \mathbf{P}_j) = \sum_i \lambda_i^2 \mathbf{P}_i$, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = (\sum_i \lambda_i^2 \mathbf{P}_i)(\sum_j \lambda_j \mathbf{P}_j) = \sum_i \lambda_i^3 \mathbf{P}_i$, $\cdots$, $\mathbf{A}^n = \sum_i \lambda_i^n \mathbf{P}_i$
Basistransformation :
$\mathbf{A}^n = \sum_i \lambda_i^n \mathbf{P}_i = \sum_i \lambda_i^n \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^i = \sum_i \lambda_i^n (\sum_k \mathbf{e}_k s^k{}_i) \otimes (\sum_\ell t^i{}_\ell \mathbf{e}^\ell) = \sum_{km\ell} \sum_i (s^k{}_i \lambda_i^n t^i{}_\ell)\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^\ell$
$\sum_i (s^k{}_i \lambda_i^n t^i{}_\ell) = \mathbf{S} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 2(1 - 2^n) \\ 3(2^n - 1) & 3 \cdot 2^n - 2 \end{pmatrix}$
Für orthogonale Basis, $(\mathbf{A}^n)^i{}_j = (\mathbf{A}^n)^{ij}$

5.2 Lokale Transformation

a) $\mathbf{dx} = dx^i \mathbf{e}_i = (\frac{\partial}{\partial x'^j} x^i) dx'^j \mathbf{e}_i \equiv dx'^j \mathbf{e}'_j$. $\to \mathbf{e}'_j = (\frac{\partial}{\partial x'^j} x^i)\mathbf{e}_i$
elliptische Koordinaten : $x'^1 = u$, $x'^2 = v$
Transformation zwischen kartesischen Koordinaten und elliptischen Koordinaten
$x^1 = \cosh u \cos v$ und $x^2 = \sinh u \sin v$.
$\mathbf{e}'_1 = (\frac{\partial}{\partial x'^1} x^i)\mathbf{e}_i = \sinh u \cos v\, \mathbf{e}_1 + \cosh u \sin v\, \mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}'_2 = (\frac{\partial}{\partial x'^2} x^i)\mathbf{e}_i = -\cosh u \sin v\, \mathbf{e}_1 + \sinh u \cos v\, \mathbf{e}_2$
$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sinh u \cos v & -\cosh u \sin v \\ \cosh u \sin v & \sinh u \cos v \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S}$ mit $s^i{}_j = \frac{\partial}{\partial x'^j} x^i$
Anmerkung 1 : Im Skriptum (Sec.2.13) sind die Basisvektoren als Einheitsvektoren definiert (d.h. $\mathbf{x} = \sum_i dx^i h_i \hat{\mathbf{e}}'_i$ mit $h_i = |\mathbf{e}'_i|$ und $\hat{\mathbf{e}}'_i = \mathbf{e}'_i / |\mathbf{e}'_i|$.) Aber in diesem Beispiel sind die Basisvektoren als allgemeine nicht-orthogonale Vektoren behandelt (wie in, z.B. Sec.2.7 im Skriptum).
Anmerkung 2 : In Indexschreibweise wird der Operator $\frac{\partial}{\partial x^i}$ mit ∂_i und $\frac{\partial}{\partial x_i}$ mit ∂^i bezeichnet.
b) C_1: $\cos^2 v + \sin^2 v = 1 \to \frac{x^2}{\cosh^2 u} + \frac{y^2}{\sinh^2 u} = 1$
$\to$ Für $u = \ln 2$, $\frac{16x^2}{25} + \frac{16y^2}{9} = 1$
C_2: $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1 \to \frac{x^2}{\cos^2 v} - \frac{y^2}{\sin^2 v} = 1$
$\to$ Für $v = \pi/4$, $2x^2 - 2y^2 = 1$
Auf dem Schnittpunkt $(u, v) = (\ln 2, \pi/4)$,
$\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{4\sqrt{2}}(3\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2)$ und
$\mathbf{e}'_2 = \frac{1}{4\sqrt{2}}(-5\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2)$
$\mathbf{e}'_1$ ist der Tangentialvektor entlang der Kurve mit konstantem v und $\mathbf{e}'_2$ mit konstantem u.



c) metrischer Tensor
$\mathbf{g}' = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S} = \mathbf{S}^T\mathbf{S}$
$= (\sinh^2 u + \sin^2 v) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder $= (\cosh^2 u - \cos^2 v) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathbf{g}'^* = (\cosh^2 u - \cos^2 v)^{-1}\mathbf{I}$
d)
$$\oint_{C_1} ds = \oint_{C_1} |d\mathbf{x}|_{u=\ln 2} = \oint_{C_1} |\underbrace{dx'^1}_{0} \mathbf{e}'_1 + dx'^2 \mathbf{e}'_2|_{u=\ln 2} = \int_0^{2\pi} |\mathbf{e}'_2|_{u=\ln 2} dv = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}\Big|_{u=\ln 2} dv$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{9}{16} + \sin^2 v}\, dv$$