6. Tutorium **für 27.11.2020**

6.1 Differentialoperatoren (II)

Betrachte eine lokale Transformation $dx^i \mathbf{e}_i = dx'^i \mathbf{f}_i$ zwischen der Standardbasis $\mathbf{e}_i$ und der ortsabhängigen Basis $\mathbf{f}_i$ krummliniger Koordinaten. Die Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ zwischen den Basisvektoren ist gegeben, durch

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \mathbf{S}\,.$$

a) Schreibe die Transformationsmatrix $\mathbf{A}$ zwischen den Differentialoperatoren $\partial_i = \partial/\partial x^i$ und $\partial'_i = \partial/\partial x'^i$ (d.h. $\partial'_i = a^j{}_i \partial_j$) und zeige, dass gilt $\mathbf{A} = \mathbf{S}$ und $\nabla = \mathbf{e}^i \partial_i = \mathbf{f}^i \partial'_i$.
b) Schreibe die Transformationsmatrix $\mathbf{B}$ zwischen den Differentialoperatoren $\partial^i = \partial/\partial x_i$ und $\partial'^i = \partial/\partial x'_i$ (d.h. $\partial'^i = b^i{}_j \partial^j$) und zeige, dass gilt $\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}$ und $\nabla = \mathbf{e}_i \partial^i = \mathbf{f}_i \partial'^i$.
c) Berechne $\nabla \times \mathbf{f}^i$ mit den folgenden Schritten.
  1) Berechne $\nabla \times (\nabla \psi(\mathbf{x}))$ für ein ortsabhängiges Skalarfeld $\psi(\mathbf{x})$.
  2) Zeige $\nabla x'^i = \mathbf{f}^i$.
  3) Berechne $\nabla \times \mathbf{f}^i$.
d) Berechne $\nabla \cdot (\frac{1}{V}\mathbf{f}_i)$ mit den folgenden Schritten, wobei $V = \det\mathbf{S}$.
  1) Zeige $\varepsilon^{ijk}\mathbf{f}_i = c\mathbf{f}^j \times \mathbf{f}^k$ und bestimme die Konstante c.
  2) Zeige mit Hilfe der Indexschreibweise die Identität
  $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$.
  3) Berechne $\nabla \cdot (\frac{1}{V}\mathbf{f}_i)$.
e) Zeige für ein ortsabhängiges Skalarfeld $\psi(\mathbf{x})$.

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \partial'_i (V \partial'^i \psi(\mathbf{x}))$$

f) Zeige für Kugelkoordinaten $(x'^1, x'^2, x'^3) = (r, \theta, \phi)$

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 \partial_r \psi(\mathbf{x}) \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \partial_\theta \left(\sin\theta \partial_\theta \psi(\mathbf{x}) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \partial^2_\phi \psi(\mathbf{x})\,.$$

Hinweis : $(x, y, z) = (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta)$
g) Berechne für ein Vektorfeld $\mathbf{w} = r^{-1}\mathbf{f}_1$ das Oberflächenintegral

$$\int_F \mathbf{w} \cdot d\mathbf{F} = \int_F \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dF$$

wobei $\mathbf{n}$ der normierte Normalvektor auf der Oberfläche $F = \{(r, \theta, \phi) | r = R, 0 \le \theta < \pi, 0 \le \phi < 2\pi\}$. $\mathbf{f}_i$ ist ein Basisvektor in Kugelkoordinaten.
h) Berechne für das Vektorfeld $\mathbf{w}$ aus (g) das Volumenintegral

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{w} d\mathcal{V}\,.$$

wobei $\mathcal{V} = \{(r, \theta, \phi) | 0 \le r \le R, 0 \le \theta < \pi, 0 \le \phi < 2\pi\}$.

Ankreuzbar: 1ab, 1c, 1d, 1ef, 1gh