6. Tutorium - Lösungen **27.11.2020**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

6.1 Differentialoperatoren (II)

a) $\mathbf{dx} = dx^i \mathbf{e}_i = \partial'_j x^i dx'^j \mathbf{e}_i =\equiv dx'^j \mathbf{f}_j \to s^i{}_j = \partial'_j x^i$

$\partial'_i = \frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial x^j} = (\partial'_i x^j)\partial_j = s^j{}_i \partial_j \equiv a^j{}_i \partial_j \to \mathbf{A} = \mathbf{S}$ (d.h. ∂'_i ist eine kovariante Komponente)

Orthogonalität der dualen Basis : $\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}^j = \delta_i^j \to \mathbf{f}^i = (\mathbf{S}^{-1})^i{}_j \mathbf{e}^j \equiv t^i{}_j \mathbf{e}^j$ $(\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1})$

$\to \mathbf{f}^i \partial'_i = (t^i{}_k \mathbf{e}^k)(s^j{}_i \partial_j) = (\mathbf{ST})^j{}_k \mathbf{e}^k \partial_j = \delta_k^j \mathbf{e}^k \partial_j = \mathbf{e}^j \partial_j (= \mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y + \mathbf{e}_z \partial_z) = \nabla$

b) $\mathbf{dx} = dx_i \mathbf{e}^i = (\partial'^j x_i) dx'_j \mathbf{e}^i = dx'_j \mathbf{f}^j \to \mathbf{T} = (\partial'^j x_i) dx'_j$

$\partial'^i = (\partial'^i x_j)\partial^j = t^i{}_j \partial^j \equiv b^i{}_j \partial^j \to \mathbf{B} = \mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$ (d.h. ∂'^i ist eine kontravariante Komponente)

$\mathbf{f}_i \partial'^i = (\mathbf{e}_k s^k{}_i)(t^i{}_j \partial^j) = (\mathbf{ST})^k{}_j \mathbf{e}_k \partial^j = \delta_j^k \mathbf{e}_k \partial^j = \mathbf{e}_j \partial^j$

c1) In der Standardbasis

$$\nabla \times (\nabla\psi(\mathbf{x})) = \mathbf{e}^j \partial_j \times \mathbf{e}^k \partial_k \psi(\mathbf{x}) = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}^i \partial_j \partial_k \psi(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^i \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\text{asymmetrisch}} \underbrace{\partial_j \partial_k}_{\text{symmetrisch}} \psi(\mathbf{x}) = 0$$

z.B. $(\nabla \times (\nabla\psi(\mathbf{x})))_1 = \partial_2\partial_3\psi(\mathbf{x}) - \partial_3\partial_2\psi(\mathbf{x}) = 0$

Anmerkung : Das Ergebnis ist unabhängig von der Basis. Die Rechnung in der Standardbasis ist einfachst. In den krummlinigen Koordinaten $\nabla \times (\nabla\psi(\mathbf{x})) = \mathbf{f}^j \partial'_j \times \mathbf{f}^k \partial'_k \psi(\mathbf{x})$ Der Operator ∂'_j wirkt auf $\mathbf{f}^k$ und $\partial'_k \psi(\mathbf{x})$ und sie müssen richtig gerechnet werden.

c2) $\nabla x'^i = \mathbf{f}^j \partial'_j x'^i = \mathbf{f}^j \delta_j^i = \mathbf{f}^i$

c3) $\psi(\mathbf{x}) = x'^i \to \nabla \times (\nabla x'^i) = 0$ (siehe c1) $\to \nabla \times \mathbf{f}^i = 0$ (siehe c2)

d1) $\mathbf{f}_1$ ist orthogonal zu $\mathbf{f}^2$ und $\mathbf{f}^3 \to \mathbf{f}_1 = c\mathbf{f}^2 \times \mathbf{f}^3$

Normierung : $\mathbf{f}^1 \cdot \mathbf{f}_1 = 1 \to c\mathbf{f}^1 \cdot (\mathbf{f}^2 \times \mathbf{f}^3) = 1 \to c = 1/(\mathbf{f}^1 \cdot (\mathbf{f}^2 \times \mathbf{f}^3))$.

$$\mathbf{f}^1 \cdot (\mathbf{f}^2 \times \mathbf{f}^3) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \\ \mathbf{f}^3 \end{pmatrix} = \det \left(\mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^3 \end{pmatrix} \right) = \det(\mathbf{S}^{-1}) \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^3 \end{pmatrix} = \det(\mathbf{S}^{-1}) = 1/(\det \mathbf{S}) = 1/V$$

$\to \mathbf{f}_1 = V\,\mathbf{f}^2 \times \mathbf{f}^3$. Auf die gleiche Weise $\mathbf{f}_2 = V\,\mathbf{f}^3 \times \mathbf{f}^1$, $\mathbf{f}_3 = V\,\mathbf{f}^1 \times \mathbf{f}^2$.

Alternative Lösung :

$\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_j s^j{}_i \to \mathbf{e}_j = \mathbf{f}_i t^i{}_j$ und $\mathbf{e}^j = s^j{}_i \mathbf{f}^i$

$\varepsilon^{jk\ell} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}^k \times \mathbf{e}^\ell = s^k{}_m \mathbf{f}^m \times s^\ell{}_n \mathbf{f}^n$

$\to \varepsilon^{jk\ell} \mathbf{f}_i t^i{}_j = s^k{}_m s^\ell{}_n \mathbf{f}^m \times \mathbf{f}^n$

$\to \varepsilon^{jk\ell} t^i{}_j t^o{}_k t^p{}_\ell \mathbf{f}_i = t^o{}_k t^p{}_\ell s^k{}_m s^\ell{}_n \mathbf{f}^m \times \mathbf{f}^n$

$\to \varepsilon^{iop} \det(\mathbf{T}) \mathbf{f}_i = \delta_m^o \delta_n^p \mathbf{f}^m \times \mathbf{f}^n$

$\to \varepsilon^{iop} \mathbf{f}_i = (\det \mathbf{T})^{-1} \mathbf{f}^o \times \mathbf{f}^p = \det(\mathbf{S}) \mathbf{f}^o \times \mathbf{f}^p$

d2) Beweis in der Standardbasis

$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla \cdot (a^i \mathbf{e}_i \times b^j \mathbf{e}_j) = \nabla \cdot (a^i b^j \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) = \nabla \cdot (a^i b^j \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}^k) = \mathbf{e}_\ell \partial^\ell \cdot (a^i b^j \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}^k) = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_\ell \cdot \mathbf{e}^k \partial^\ell (a^i b^j)$

$= \varepsilon_{ijk} \delta_\ell^k \partial^\ell (a^i b^j) = \varepsilon_{ijk}((\partial^k a^i) b^j + a^i (\partial^k b^j)) = (\nabla \times \mathbf{a})_j b^j - a^i (\nabla \times \mathbf{b})_i = (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$

d3) $\nabla \cdot (\frac{1}{V}\mathbf{f}_1) = \nabla \cdot (\mathbf{f}^2 \times \mathbf{f}^3) = (\underbrace{\nabla \times \mathbf{f}^2}_{=0}) \cdot \mathbf{f}^3 - \mathbf{f}^2 \cdot (\underbrace{\nabla \times \mathbf{f}^3}_{=0}) = 0$

Auf die gleiche Weise $\nabla \cdot (V^{-1}\mathbf{f}_2) = 0$ und $\nabla \cdot (V^{-1}\mathbf{f}_3) = 0$

e) $\nabla \cdot (\nabla\psi(\mathbf{x})) = \mathbf{f}^i \cdot \partial'_i \left(\mathbf{f}_j \partial'^j \psi(\mathbf{x})\right) = \mathbf{f}^i \cdot \partial'_i \left((V\partial'^j\psi(\mathbf{x}))(V^{-1}\mathbf{f}_j)\right) = \mathbf{f}^i \cdot (V^{-1}\mathbf{f}_j)\partial'_i (V\partial'^j\psi(\mathbf{x})) + (V\partial'^j\psi(\mathbf{x}))\underbrace{\mathbf{f}^i \cdot \partial'_i (V^{-1}\mathbf{f}_j)}_{=\nabla\cdot(V^{-1}\mathbf{f}_j)=0} =$

$V^{-1}\delta_j^i \partial'_i (V\partial'^j\psi(\mathbf{x})) = V^{-1}\partial'_i (V\partial'^i\psi(\mathbf{x}))$

f) $$\mathbf{S} = (\partial'_j x^i) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$V = \det\mathbf{S} = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 \times \mathbf{f}_3 = \sin\theta\cos\phi\, r^2 \sin\theta^2 \cos\phi + \sin\theta\sin\phi\, r^2\sin\theta^2\sin\phi + \cos\theta\, r^2 \sin\theta\cos\theta = r^2\sin\theta$

$\partial_r = \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x'^1} = \partial'_1 = g_{1i}\partial'^i$, $\partial_\theta = \partial'_2 = g_{2i}\partial'^i$, $\partial_\phi = \partial'_3 = g_{3i}\partial'^i$

$\mathbf{g} = (\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j) = \mathbf{S}^T\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$, $\mathbf{g}^* = (\mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}^j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(r^2\sin^2\theta) \end{pmatrix}$

$\nabla^2\psi(\mathbf{x}) = V^{-1}\partial'_i(V\partial'^i\psi(\mathbf{x})) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\partial_r(r^2\sin\theta\partial_r\psi(\mathbf{x})) + \partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta\psi(\mathbf{x})) + \partial_\phi(\sin^{-1}\theta\partial_\phi\psi(\mathbf{x}))\right]$

$= \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\psi(\mathbf{x})) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta\psi(\mathbf{x})) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2\psi(\mathbf{x})$

g) Fläche F : Oberfläche einer Kugel mit Radius R (d.h. $dr = dx'^1 = 0$)

$\rightarrow d\mathbf{F}$: das von $dx'^2\mathbf{f}_2$ und $dx'^3\mathbf{f}_3$ aufgespannte Parallelogramm $\rightarrow d\mathbf{F} = dx'^2\mathbf{f}_2 \times dx'^3\mathbf{f}_3 = V\mathbf{f}_1 dx'^2 dx'^3$

$\int_F \mathbf{w} \cdot d\mathbf{F} = \int_F r^{-1}\mathbf{f}_1 \cdot V d\mathbf{f}_1 dx'^2 dx'^3 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta R\sin\theta = 4\pi R$

h) $d\mathcal{V}$: das von $dx'^1\mathbf{f}_1$, $dx'^2\mathbf{f}_2$ und $dx'^3\mathbf{f}_3$ aufgespannte Parallelepiped

$\rightarrow d\mathcal{V} = dx'^1\mathbf{f}_1 \cdot (dx'^2\mathbf{f}_2 \times dx'^3\mathbf{f}_3) = dx'^1 dx'^2 dx'^3 V\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1 = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$

$\nabla \cdot \mathbf{w} = \mathbf{f}^i\partial'_i \cdot r^{-1}\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}^i \cdot V^{-1}\mathbf{f}_1(\partial'_i r^{-1}V) + r^{-1}\underbrace{\mathbf{f}^i\partial'_i \cdot V^{-1}\mathbf{f}_1}_{=\nabla\cdot V^{-1}\mathbf{f}_1=0} = V^{-1}\partial'_1 r^{-1}V$

$\int_\mathcal{V} \nabla\cdot\mathbf{w} d\mathcal{V} = \int_\mathcal{V} V^{-1}(\partial'_1 r^{-1}V)d\mathcal{V} = \int_\mathcal{V}(\partial'_1 r^{-1}V)dx'^1dx'^2dx'^3 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \int_0^R dr(\partial'_1 r\sin\theta) = 4\pi\int_0^R dr(\partial_r r) = 4\pi R$

Anmerkung : Gaußcher Integralsatz $\int_F \mathbf{w} \cdot d\mathbf{F} = \int_\mathcal{V} \nabla \cdot \mathbf{w} d\mathcal{V}$