7. Tutorium **für 4.12.2020**

7.1 Deltafolge

Gegeben sei folgende Funktion (n: Ganzzahl):

$$\delta_n(x) = \begin{cases} c & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Wie muss die Konstante c gewählt werden, damit gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) dx = 1\,.$$

Verwende im Folgenden diesen Wert für c.
b) Zeichne die Funktion $\delta_n(x)$ für $n = 1$ und $n = 5$. Zeichne auch $\delta_n(x-2)$ für diese Werte von n.
c) Berechne für $f(x) = x^2$ das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_n(x-b)dx.$$

Vergleiche das Ergebnis mit $f(b)$. Was passiert für große $n \to \infty$?
d) Berechne $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(-x)dx$.
e) Berechne $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(kx)dx$ mit $k > 0$.

7.2 Delta-Distribution und Heaviside-Funktion

Bitte die Endergebnisse in den Abschnitt "Bsp.7.2 (Online Quiz)" auf TUWEL eintragen.
a) Berechne $\int_{0}^{\infty} x^3\delta(2x^2 + 4x - 6)dx$ für die Delta-Distribution $\delta(x)$.
b) Berechne $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(R^2 - x^2 - y^2)dxdy$ für die Heaviside-Funktion $H(x)$ (R : positive Konstante).
c) Berechne $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(R - \sqrt{x^2 + y^2})dxdy$ für die Heaviside-Funktion $H(x)$ (R : positive Konstante).
d) Berechne $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(R^2 - x^2 - y^2)dxdy$ für die Delta-Distribution $\delta(x)$ (R : positive Konstante).
e) Berechne $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(R - \sqrt{x^2 + y^2})dxdy$ für die Delta-Distribution $\delta(x)$ (R : positive Konstante).

7.3 Deltafolge (II)

a) Überprüfe durch Anwenden auf eine Testfunktion, ob die folgende Folge $\{f_n(x)\}$ eine Deltafolge für $n \to \infty$ ist:

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2} \,.$$

b) Zeige mit Verwendung der Deltafolge $\{f_n(x)\}$, dass gilt

$$x \frac{d}{dx} \delta(x) = -\delta(x) \,.$$

c) Berechne die Fouriertransformation der Deltafolge $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) e^{-ikx} dx$ im Limes $n \to \infty$.

Hinweis :
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, $\quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$, $\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ikx} dx = \sqrt{\pi} e^{-k^2/4}$

Ankreuzbar: 1ab, 1c-e, 2a-c, 2de, 3a-c