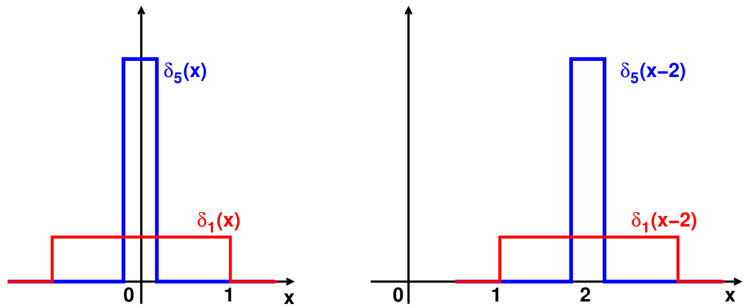
7. Tutorium - Lösungen **4.12.2020**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

7.1 Delta-Distribution

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)dx = \int_{-1/n}^{1/n} c\,dx = cx|_{x=-1/n}^{1/n} = \frac{2c}{n} = 1. \qquad \rightarrow \qquad c = \frac{n}{2}.$

b)



c) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_n(x-b)dx = \int_{b-1/n}^{b+1/n} f(x)\frac{n}{2}dx = \frac{n}{2}\int_{b-1/n}^{b+1/n} x^2 dx = \frac{n}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=b-1/n}^{b+1/n}$

$= \frac{n}{6}\left[(b+1/n)^3 - (b-1/n)^3\right] = \frac{n}{6}\left[b^3 + \frac{3b^2}{n} + \frac{3b}{n^2} + \frac{1}{n^3} - b^3 + \frac{3b^2}{n} - \frac{3b}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right]$

$= \frac{n}{6}\left[\frac{6b^2}{n} + \frac{2}{n^3}\right] = b^2 + \frac{1}{3n^2}.$

Das ist ähnlich zu $f(b)$. Für $n \to \infty$ verschwindet der Zusatzterm, und das Ergebnis entspricht genau $f(b)$.

d) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)dx = 1$ da $\delta_n(x)$ eine gerade Funktion ist.

e) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(kx)dx = \int_{-1/(nk)}^{1/(nk)} \frac{n}{2}dx = \frac{n}{2}x\Big|_{x=-1/(nk)}^{1/(nk)} = \frac{2n}{2nk} = \frac{1}{k}.$

7.2 Delta-Distribution und Heaviside-Funktion

a) $t = 2x^2 + 4x - 6 = 2(x+1)^2 - 8 \rightarrow$ Wenn $0 \le x < \infty$, ist $t(x)$ monoton steigend ($t \ge -6$)

$\rightarrow x(t) = -1 + \sqrt{t/2+4}.$

$\int_0^{\infty} x^3\delta(2x^2+4x-6)dx = \int_{-6}^{\infty}(-1+\sqrt{t/2+4})^3\delta(t)\frac{dx}{dt}dt = \int_{-6}^{\infty}(-1+\sqrt{t/2+4})^3\delta(t)\frac{1}{4\sqrt{t/2+4}}dt = \frac{1}{8}$

Alternative Lösung : $f(x) = 2x^2+4x-6 = 2(x-1)(x+3)$ und $f'(x) = 4x+4$

$\int_0^{\infty} \delta(2(1-x)(x+2))x^3 dx = \frac{1}{|f'(1)|}1^3 = \frac{1}{8}$

b) Polarkoordinaten : $(x'^1, x'^2) = (r,\theta)$ mit $(x^1,x^2) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\rightarrow dxdy = dx'^1dx'^2|\det(\mathbf{S}')| = rdrd\theta$ (Die Transformationsmatrix ist die Jacobi-Matrix : $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$)

oder $dx'^1dx'^2|\det(\mathbf{S}')| = dx'^1dx'^2|\det(\mathbf{e}'_1\ \mathbf{e}'_2)|$ ist die Fläche des von $dx'^1\mathbf{e}'_1$, $dx'^2\mathbf{e}'_2$ gebildeten Parallelogramms.

$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdyH(R^2-x^2-y^2) = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} H(R^2-r^2)rd\theta dr = 2\pi\int_0^{\infty} H(R^2-r^2)rdr$

$= 2\pi\int_0^R rdr = \pi R^2$ (Fläche eines Kreises mit Radius R)

Alternative Lösung :

$H(R^2-x^2-y^2) = 1$ wenn $y^2 < R^2 - x^2$ bzw. $R^2 > x^2$. Sonst $H(R^2-x^2-y^2) = 0$.

$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdyH(R^2-x^2-y^2) = \int_{-R}^{R} dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy = \int_{-R}^{R} dx 2\sqrt{R^2-x^2} = \pi R^2$

c) Ähnlich wie in (b),

$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdyH(R-\sqrt{x^2+y^2}) = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} H(R-r)rd\theta dr = 2\pi\int_0^{\infty} H(R-r)rdr$

$= 2\pi\int_0^R rdr = \pi R^2$

d) $\delta(x)=\frac{d}{dx}H(x)$
$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dxdy\delta(R^2-x^2-y^2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dxdy\frac{d}{d(R^2)}H(R^2-x^2+y^2)=\frac{d}{d(R^2)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dxdyH(R^2-x^2-y^2)$
$=\frac{d}{d(R^2)}(\pi R^2)=\pi$
oder
$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dxdy\delta(R^2-x^2-y^2)=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}drd\theta r\delta(R^2-r^2)=2\pi\frac{R}{|-2R|}=\pi$
e) $\delta(x)=\frac{d}{dx}H(x)$
$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dxdy\delta(R-\sqrt{x^2+y^2})=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dxdy\frac{d}{dR}H(R-\sqrt{x^2+y^2})=\frac{d}{dR}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dxdyH(R-\sqrt{x^2+y^2})$
$=\frac{d}{dR}(\pi R^2)=2\pi R$
oder
$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dxdy\delta(R-\sqrt{x^2+y^2})=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}drd\theta r\delta(R-r)=2\pi R$

7.3 Deltafolge (II)

a) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-y^2}\varphi\left(\frac{y}{n}\right)\frac{1}{n}dy=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-y^2}\varphi\left(\frac{y}{n}\right)dy$
$\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\varphi(0)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-y^2}dy=\varphi(0)$
Anmekung : $f_n(x)$ ist eine Normalverteilung (Breite $\propto 1/n$ und Höhe $\propto n$)
b) $f_n(x)=\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2}\to x(d/dx)f_n(x)=-2\frac{n^3}{\sqrt{\pi}}x^2e^{-n^2x^2}$
$\int_{-\infty}^{\infty}\left[x(d/dx)f_n(x)\right]\varphi(x)dx=-2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n^3}{\sqrt{\pi}}x^2e^{-n^2x^2}\varphi(x)dx=-2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n^3}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{y}{n}\right)^2e^{-y^2}\varphi\left(\frac{y}{n}\right)\frac{1}{n}dy$
$=-2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}y^2e^{-y^2}\varphi\left(\frac{y}{n}\right)dy\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}-2\varphi(0)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}y^2e^{-y^2}dy=-\varphi(0)$
Anmerkung : $\int_{-\infty}^{\infty}\left[x(d/dx)\delta(x)\right]\varphi(x)dx=-\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)(d/dx)\left(x\varphi(x)\right)dx=-(d/dx)\left(x\varphi(x)\right)_{x=0}=-\varphi(0)$
c) $\int_{-\infty}^{\infty}f_n(x)e^{-ikx}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2}e^{-ikx}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-y^2}e^{-i(k/n)y}dy=e^{-(k/n)^2/4}=e^{-k^2/(4n^2)}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}1$
Anmerkung : Die Fouriertransformation der Delta-Distribution ist eine Konstante $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{-ikx}dx=1$. Die inverse Transformation ist $\delta(x)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}dk$ (Integraldarstellung der Delta-Distribution).