8. Tutorium **für 11.12.2020**

8.1 Verallgemeinerte Funktion

Berechne und vereinfache folgende Ausdrücke der verallgemeinerten Funktionen. ($H(t)$: Heaviside-Funktion)

a) $\dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{1}{3}H(-t)e^{t}-\dfrac{1}{3}H(t)e^{-2t}\right)$

b) $\dfrac{d^2}{dt^2}\left(-\dfrac{1}{3}H(-t)e^{t}-\dfrac{1}{3}H(t)e^{-2t}\right)$

c) $\dfrac{d}{dx}\sin|x|$

d) $\dfrac{d^2}{dx^2}\sin|x|$

e) $\displaystyle\int_0^\infty f'(x)\,\sin x\,dx \qquad \left(f(x)=\begin{cases}\sin x & (|x|\le\pi/2)\\ 0 & (|x|>\pi/2)\end{cases}\right)$

8.2 Cauchyscher Hauptwert

a) Berechne das Integral

$$\int_{C_1}\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz$$

im Limes $R\to\infty$. C_1 ist ein oberer Halbkreis mit Radius R in der komplexen Zahlenebene (d.h. $z=Re^{i\theta}$, $0<\theta<\pi$).

b) Berechne das Integral

$$\int_{C_2}\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz$$

im Limes $r\to 0$. C_2 ist ein oberer Halbkreis mit Radius r in der komplexen Zahlenebene (d.h. $z=re^{i\theta}$, $0<\theta<\pi$).

c) Berechne den Cauchyschen Hauptwert

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{ix}}{x^2}dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1-e^{ix}}{x^2}dx+\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{1-e^{ix}}{x^2}dx\right].$$

d) Berechne $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$.

8.3 Greensche Funktion

Betrachte einen Differentialoperator

$$\mathcal{L}_t x(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} - 2 \right) x(t)\,.$$

a) Schreibe zwei lineare unabhängige Lösungen, $x_1(t)$ und $x_2(t)$, der homogenen Differentialgleichung $\mathcal{L}_t x(t) = 0$ an.
b) Die Greensche Funktion $G(t,t')$ des Differentialoperators $\mathcal{L}_t$ erfüllt die inhomogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_t G(t,t') = \delta(t-t')$. Das heißt, dass für $t - t' \neq 0$ die Greensche Funktion $G(t,t')$ die homogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_t G(t,t') = 0$ erfüllt. Nimm den Ansatz

$$G(t,t') = \begin{cases} A_1(t')x_1(t) + B_1(t')x_2(t) & (t < t') \\ A_2(t')x_1(t) + B_2(t')x_2(t) & (t' < t) \end{cases}$$

an. Bestimme die Koeffizienten $A_1(t')$, $A_2(t')$, $B_1(t')$ und $B_2(t')$.
Hinweis: Die Greensche Funktion erfüllt die folgenden Bedingungen:

(i) Translationsinvarianz : $G(t,t') = G(t-t',0)$

(ii) Stetigkeit der Greenschen Funktion : $\lim_{t\to t'^-} G(t,t') = \lim_{t\to t'^+} G(t,t')$

(iii) $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \mathcal{L}_t G(t,t')dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \delta(t-t')dt = 1$

(iv) Randbedingungen : $A_1(0) = \alpha$ und $B_1(0) = \beta$

Ankreuzbar: 1ab, 1c-e, 2ab, 2cd, 3ab