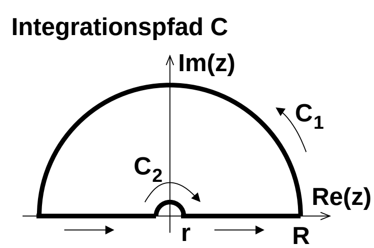
8. Tutorium - Lösungen **11.12.2020**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

8.1 Verallgemeinerte Funktion

a) $\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{3}H(-t)e^t - \frac{1}{3}H(t)e^{-2t}\right) = \frac{1}{3}\delta(-t)e^t - \frac{1}{3}H(-t)e^t - \frac{1}{3}\delta(t)e^{-2t} + \frac{2}{3}H(t)e^{-2t} = -\frac{1}{3}H(-t)e^t + \frac{2}{3}H(t)e^{-2t}$
b) $\frac{d^2}{dt^2}\left(-\frac{1}{3}H(-t)e^t - \frac{1}{3}H(t)e^{-2t}\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{3}H(-t)e^t + \frac{2}{3}H(t)e^{-2t}\right)$
$= \frac{1}{3}\delta(-t)e^t - \frac{1}{3}H(-t)e^t + \frac{2}{3}\delta(t)e^{-2t} - \frac{4}{3}H(t)e^{-2t} = \delta(t) - \frac{1}{3}H(-t)e^t - \frac{4}{3}H(t)e^{-2t}$
Anmerkung : $G(t) = -\frac{1}{a+b}\left(H(t)e^{-at} + H(-t)e^{bt}\right)$ ist eine Greensche Funktion der Differentialgleichung $\mathcal{L}_t G(t) = \delta(t)$ mit $\mathcal{L}_t = \frac{d^2}{dt^2} + (a-b)\frac{d}{dt} - ab$. (In diesem Bsp. $a = 2$ und $b = 1$.)
c) $\frac{d}{dx}\sin|x| = \frac{d}{dx}\left(H(x)\sin x + H(-x)\sin(-x)\right) = \frac{d}{dx}\left(H(x) - H(-x)\right)\sin x$
$= (\delta(x) + \delta(-x))\sin x + (H(x) - H(-x))\cos x = (H(x) - H(-x))\cos x$
alternative Lösung
$\frac{d}{dx}\sin|x| = \frac{d|x|}{dx}\cos|x| = \mathrm{sgn}(x)\cos x$
oder
$\frac{d}{dx}\sin|x| = \frac{d}{dx}\mathrm{sgn}(x)\sin x = 2\delta(x)\sin x + \mathrm{sgn}(x)\cos x = \mathrm{sgn}(x)\cos x$
Anmerkung :
$\sin x = \mathrm{sgn}(x)\sin|x|$ und $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ aber $\frac{d}{dx}\mathrm{sgn}(x)\sin|x| = 2\delta(x)\sin|x| + (\mathrm{sgn}(x))^2\cos|x| = (\mathrm{sgn}(x))^2\cos|x|$
$\cos x = (\mathrm{sgn}(x))^2\cos|x|$ gilt nur wenn $x \neq 0$. (Der Wert $\mathrm{sgn}(x=0)$ ist nicht eindeutig definiert.)
d)
$\frac{d^2}{dx^2}\sin|x| = \frac{d}{dx}\left(H(x) - H(-x)\right)\cos x$
$= (\delta(x) + \delta(-x))\cos x - (H(x) - H(-x))\sin x = 2\delta(x) - (H(x) - H(-x))\sin x$
Alternative Lösung:
$\frac{d^2}{dx^2}\sin|x| = \frac{d}{dx}\mathrm{sgn}(x)\cos x = 2\delta(x)\cos x - \mathrm{sgn}(x)\sin x = 2\delta(x) - \mathrm{sgn}(x)\sin x = 2\delta(x) - \sin|x|$
e) $\int_0^\infty f'(x)\sin x dx = f(x)\sin x|_{x=0}^\infty - \int_0^\infty f(x)\cos x dx = -\int_0^{\pi/2}\sin x\cos x dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2x dx = -\frac{1}{2}$
Alternative Lösung
$f(x) = H(\pi/2 + x)H(\pi/2 - x)\sin x$
$\to f'(x) = H(\pi/2+x)H(\pi/2-x)\cos x + \delta(\pi/2+x)H(\pi/2-x)\sin x - H(\pi/2+x)\delta(\pi/2-x)\sin x$
$= H(\pi/2+x)H(\pi/2-x)\cos x - \delta(\pi/2+x) - \delta(\pi/2-x)$
$\int_0^\infty f'(x)\sin x dx = \int_0^\infty H(\pi/2+x)H(\pi/2-x)\cos x\sin x dx - \int_0^\infty \delta(\pi/2+x)\sin x dx - \int_0^\infty \delta(\pi/2-x)\sin x dx$
$= \int_0^{\pi/2}\cos x\sin x dx - 0 - \int_0^\infty \delta(\pi/2-x)\sin x dx = -1/2$

8.2 Cauchyscher Hauptwert



a) $\int_{C_1}\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz = \int_0^\pi \frac{1-e^{iRe^{i\theta}}}{R^2e^{2i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta = i\int_0^\pi \frac{1-e^{iR\cos\theta - R\sin\theta}}{Re^{i\theta}}d\theta \xrightarrow{R\to\infty} 0$
($\lim_{R\to\infty} e^{iR\cos\theta - R\sin\theta} = 0$ wenn $\sin\theta > 0$)
b) $\int_{C_2}\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz = \int_\pi^0 \frac{1-e^{ire^{i\theta}}}{r^2e^{2i\theta}}ire^{i\theta}d\theta = i\int_\pi^0 \frac{1-e^{ire^{i\theta}}}{re^{i\theta}}d\theta$
$= i\int_\pi^0 \frac{1}{re^{i\theta}}\left(1 - \sum_{n=0}^\infty \frac{i^ne^{in\theta}}{n!}r^n\right)d\theta$
$= -i\int_\pi^0 \sum_{n=1}^\infty \frac{i^ne^{i(n-1)\theta}}{n!}r^{n-1}d\theta \xrightarrow{r\to 0} -i\int_\pi^0 i d\theta = \int_\pi^0 d\theta = -\pi$
c) $\mathcal{P}\int_{-\infty}^\infty \frac{1-e^{ix}}{x^2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\int_\varepsilon^\infty \frac{1-e^{ix}}{x^2}dx + \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{1-e^{ix}}{x^2}dx\right]$
$= \oint_C \frac{1-e^{iz}}{z^2}dz - \lim_{R\to\infty}\int_{C_1}\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz - \lim_{r\to 0}\int_{C_2}\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz = 0 - 0 + \pi = \pi$
Anmerkung : Wenn $C_2' = \{re^{i\theta}| -\pi < \theta < 0\}$ eine untere Halbkreis ist,
$\lim_{r\to 0}\int_{C_2'}\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz = \pi$ und $\oint_{C'}\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz = 2\pi$ wobei C' eine geschlossene Integrationspfad (C mit C_2' statt C_2).
$\mathcal{P}\int_{-\infty}^\infty \frac{1-e^{ix}}{x^2}dx = \oint_{C'}\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz - \lim_{R\to\infty}\int_{C_1}\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz - \lim_{r\to 0}\int_{C_2'}\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz = \pi$

d)
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \to$ keine singularität
$\to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1-\cos x}{x^2} dx\right]$
$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\mathrm{Re}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1-e^{ix}}{x^2} dx + \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1-e^{ix}}{x^2} dx\right] = \mathrm{Re}\left[\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{ix}}{x^2} dx\right] = \pi$
oder
$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \frac{1}{2}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{ix}}{x^2} dx + \frac{1}{2}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-ix}}{x^2} dx = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi = \pi$
($\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-ix}}{x^2} dx$ kann mit dem Integrations Pfad vom unteren Halbkreis gerechnet werden.)

8.3 Greensche Funktion

a) $\mathcal{L}_t x(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} - 2\right) x(t) = \left(\frac{d}{dt} + 2\right)\left(\frac{d}{dt} - 1\right) x(t)$
Wenn $\left(\frac{d}{dt} + 2\right) x(t) = 0$ oder $\left(\frac{d}{dt} - 1\right) x(t) = 0$, erfüllt $x(t)$ die Gleichung $\mathcal{L}_t x(t) = 0$.
$x_1(t) = e^{-2t}$ und $x_2(t) = e^t$
alternative Lösung :
Ansatz $x(t) = e^{i\omega t} \to \mathcal{L}_t x(t) = \left(-\omega^2 + i\omega - 2\right) x(t) = -(\omega - 2i)(\omega + i)x(t)$
homogene Gleichung : $\mathcal{L}_t x(t) = 0 \to \omega = 2i, -i \to x_1(t) = e^{-2t}$ und $x_2(t) = e^t$
b) $G(t,t') = \begin{cases} A_1(t')e^{-2t} + B_1(t')e^t & (t < t') \\ A_2(t')e^{-2t} + B_2(t')e^t & (t' < t) \end{cases}$
Translationsinvarianz (wenn a_i in $\mathcal{L}_t = \sum_i a_i d^i/dx^i$ konstante sind)
$G(t,t') = G(t-t',0) = \begin{cases} A_1(0)e^{-2(t-t')} + B_1(0)e^{t-t'} & (t < t') \\ A_2(0)e^{-2(t-t')} + B_2(0)e^{t-t'} & (t' < t) \end{cases}$
Stetigkeit der Greenschen Funktion
$\lim_{t\to t'^-} G(t,t') = \lim_{t\to t'^+} G(t,t') \to A_1(0) + B_1(0) = A_2(0) + B_2(0) \to A_1(0) - A_2(0) = -B_1(0) + B_2(0)$
Bedingung iii) :
$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \mathcal{L}_t G(t,t')dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\frac{d}{dt}G(t,t') + G(t,t')\right)_{t=t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} - \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} 2G(t,t')dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{d}{dt}G(t,t')\Big|_{t=t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}$
$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(-2A_2(0)e^{-2\varepsilon} + B_2(0)e^{\varepsilon} + 2A_1(0)e^{-2\varepsilon} - B_1(0)e^{\varepsilon}\right) = -2A_2(0) + B_2(0) + 2A_1(0) - B_1(0)$
Da $\mathcal{L}_t G(t,t') = \delta(t-t')$, $-2A_2(0) + B_2(0) + 2A_1(0) - B_1(0) = \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \delta(t-t')dt = 1$
$\to A_1(0) - A_2(0) = 1/3$ und $B_1(0) - B_2(0) = -1/3$
$\to A_1(t') = \alpha e^{2t'}$, $B_1(t') = \beta e^{-t'}$, $A_2(t') = (\alpha - 1/3)e^{2t'}$, $B_2(t') = (\beta + 1/3)e^{-t'}$.
$G(t,t') = \begin{cases} \alpha e^{-2(t-t')} + \beta e^{t-t'} & (t < t') \\ (\alpha - 1/3)e^{-2(t-t')} + (\beta + 1/3)e^{t-t'} & (t' < t) \end{cases}$
$= \alpha e^{-2(t-t')} + \beta e^{t-t'} + \frac{1}{3}H(t-t')(-e^{-2(t-t')} + e^{t-t'})$
Anmerkung : $\alpha = 0$, $\beta = -1/3$ und $t' = 0 \to$ Bsp.8.1ab