**9. Tutorium** **für 18.12.2020**

## 9.1 Residuensatz

a) Berechne das komplexe Integral $\oint_C \frac{z}{3z^2+3z-18}dz$ über den Kreis $C = \{z = 5e^{i\theta}\,|\,0 \leq \theta < 2\pi\}$.
b) Berechne das komplexe Integral $\oint_C \frac{1}{(z^2+1)^2}dz$ über den Kreis $C = \{z = 2e^{i\theta}\,|\,0 \leq \theta < 2\pi\}$.
c) Berechne mit Hilfe einer Kontourintegration entlang des Integrationspfads (Abb.1) im Limes $R \to \infty$ das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x-1-ia}dx$ mit Konstanten $t > 0$ und $a > 0$. Wie ist das Ergebnis im Limes $a \to 0^+$?
d) Berechne mit Hilfe einer Kontourintegration entlang des Integrationspfads (Abb.2) im Limes $R \to \infty$ das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x-1-ia}dx$ mit Konstanten $t > 0$ und $a > 0$. Wie ist das Ergebnis im Limes $a \to 0^+$?

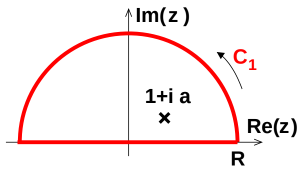

Abb.1

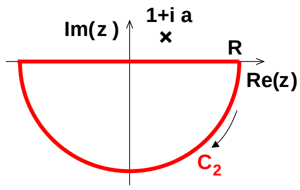

Abb.2

## 9.2 Greensche Funktion (II)

Betrachte einen Differentialoperator, der durch

$$\mathcal{L}_t x(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} - 2\right) x(t)$$

definiert ist.
a) Finde die Fouriertransformation $\tilde{G}_I(\omega)$ einer Greenschen Funktion $G_I(t,t')$, die die inhomogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_t G_I(t,t') = \delta(t-t')$ erfüllt. Die (inverse) Fouriertransformation ist durch

$$G_I(t,t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_I(\omega)\, e^{i\omega(t-t')} d\omega$$

definiert.
b) Berechne die inverse Fouriertransformation von $\tilde{G}_I(\omega)$ und bestimme die Greensche Funktion $G_I(t,t')$.
c) Löse die inhomogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_t x(t) = H(t)$ mit den Randbedingungen $x(t=0) = 0$ und $\frac{dx}{dt}(t=0) = 0$ ($H(t)$ : Heaviside-Funktion).

## 9.3 Sturm-Liouville-Problem

a) Transformiere die Differentialgleichung

$$y''(x) + 3y'(x) + (2+\lambda)y(x) = 0$$

in die Sturm-Liouville'sche Gestalt $\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + \lambda\rho(x)\right) y(x) = 0$.
b) Transformiere die Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + \lambda y(x) = 0$$

in die Sturm-Liouville'sche Gestalt $\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + \lambda\rho(x)\right) y(x) = 0$.

---

Ankreuzbar: 1ab, 1cd, 2ab, 2c, 3ab