9. Tutorium - Lösungen **18.12.2020**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

9.1 Residuensatz

a) $\oint_C \frac{z}{3z^2+3z-18}dz = \oint_C \frac{z}{3(z^2+z-6)}dz = \oint_C \frac{z}{3(z+3)(z-2)}dz$
$= 2\pi i \left.\frac{z}{3(z-2)}\right|_{z=-3} + 2\pi i \left.\frac{z}{3(z+3)}\right|_{z=2} = 2\pi i\frac{3}{15} + 2\pi i\frac{2}{15} = i\frac{2\pi}{3}$
oder
$= \oint_C \frac{1}{15}\left(\frac{3}{z+3} + \frac{2}{z-2}\right)dz = 2\pi i\frac{3}{15} + 2\pi i\frac{2}{15} = i\frac{2\pi}{3}$
b) $\oint_C \frac{1}{(z^2+1)^2}dz = \oint_C \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}dz = 2\pi i \left.\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+i)^2}\right|_{z=i} + 2\pi i \left.\frac{d}{dz}\frac{1}{(z-i)^2}\right|_{z=-i}$
$= 2\pi i\left(-\frac{2}{(z+i)^3}\right)_{z=i} + 2\pi i\left(-\frac{2}{(z-i)^3}\right)_{z=-i} = \pi/2 - \pi/2 = 0$
alternative Lösung 1 : $\oint_C \frac{1}{(z^2+1)^2}dz = \oint_C \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}dz$
Alle Pole sind im Kreis C und keine Pole sind außerhalb des Kreises.
$\to \oint_C \frac{1}{(z^2+1)^2}dz = \lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{1}{(R^2e^{2i\theta}+1)^2}iRe^{i\theta}d\theta = 0$
alternative Lösung 2 : $\oint_C \frac{1}{(z^2+1)^2}dz = \oint_C\left(\frac{1}{(z+i)(z-i)}\right)^2dz = -\frac{1}{4}\oint_C\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)^2dz$
$= -\frac{1}{4}\underbrace{\oint_C \frac{1}{(z-i)^2}dz}_{=0} - \frac{1}{4}\underbrace{\oint_C \frac{1}{(z+i)^2}dz}_{=0} + \frac{1}{2}\oint_C \frac{1}{(z-i)(z+i)}dz = -\frac{i}{4}\oint_C\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)dz = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi = 0$
c) oberer Halbkreis : $\tilde{C}_1 = \{z = Re^{i\theta}|0 < \theta < \pi\}$, geschlossener Halbkreis : $C_1 = \tilde{C}_1 + \{z = x| - R < x < R\}$
$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{x-1-ia}dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{itx}}{x-1-ia}dx = \lim_{R\to\infty}\left(\oint_{C_1}\frac{e^{itz}}{z-1-ia}dz - \int_{\tilde{C}_1}\frac{e^{itz}}{z-1-ia}dz\right)$
$\oint_{C_1}\frac{e^{itz}}{z-1-ia}dz = 2\pi ie^{it(1+ia)} = 2\pi ie^{it-at}$ wenn $R > |1+ia|$
$\left|\int_{\tilde{C}_1}\frac{e^{itz}}{z-1-ia}dz\right| = \left|\int_0^{\pi}\frac{e^{itRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}-1-ia}iRe^{i\theta}d\theta\right| \le \int_0^{\pi}\left|\frac{e^{itRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}-1-ia}iRe^{i\theta}\right|d\theta = \int_0^{\pi}|e^{-tR\sin\theta}|\left|\frac{R}{Re^{i\theta}-1-ia}\right|d\theta$
Da $\sin\theta > 0$ auf $\tilde{C}_1$ (d.h. $0 < \theta < \pi$), gilt $|e^{-tR\sin\theta}| \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$ für $t > 0$, bzw. $\left|\frac{Re^{-tR\sin\theta}}{Re^{i\theta}-1-ia}\right| \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Im Limes $R\to\infty$, $\int_{\tilde{C}_1}\frac{e^{itz}}{z-1-ia}dz \to 0$
$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{x-1-ia}dx = 2\pi ie^{it}e^{-at}$
Im Limes $a\to 0^+$, $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{x-1-ia}dx \to 2\pi ie^{it}$
d) unterer Halbkreis : $\tilde{C}_2 = \{z = Re^{i\theta}|0 > \theta > -\pi\}$,
geschlossener Halbkreis : $C_2 = \tilde{C}_2 + \{z = x| - R < x < R\}$
$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{x-1-ia}dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{itx}}{x-1-ia}dx = \lim_{R\to\infty}\left(\oint_{C_2}\frac{e^{itz}}{z-1-ia}dz - \int_{\tilde{C}_2}\frac{e^{itz}}{z-1-ia}dz\right)$
$\oint_{C_2}\frac{e^{itz}}{z-1-ia}dz = 0$ (ohne Pol innerhalb C_2)
$\left|\int_{\tilde{C}_2}\frac{e^{itz}}{z-1-ia}dz\right| = \left|\int_0^{-\pi}\frac{e^{itRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}-1-ia}iRe^{i\theta}d\theta\right| \le \int_0^{-\pi}\left|\frac{e^{itRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}-1-ia}iRe^{i\theta}\right|d\theta = \int_0^{-\pi}|e^{-tR\sin\theta}|\left|\frac{R}{Re^{i\theta}-1-ia}\right|d\theta$
Da $|e^{-tR\sin\theta}| \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ wenn $t > 0$ und $\sin\theta < 0$ (d.h. $-\pi < \theta < 0$),
Das Integral $\int_{\tilde{C}_2}\frac{e^{itz}}{z-1-ia}dz$ ist nicht vernachlässigbar.
Da $-\tilde{C}_2 = C - \tilde{C}_1$ mit $C = \{Re^{i\theta}|0 \le \theta < 2\pi\}$, gilt
$\int_{\tilde{C}_2}\frac{e^{itz}}{z-1-ia}dz = -\int_C\frac{e^{itz}}{z-1-ia}dz + \int_{\tilde{C}_1}\frac{e^{itz}}{z-1-ia}dz$
In Limes $R\to\infty$, $\int_{\tilde{C}_2}\frac{e^{itz}}{z-1-ia}dz \to -\int_C\frac{e^{itz}}{z-1-ia}dz = -2\pi ie^{it-at}$
Endlich $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{x-1-ia}dx = -\lim_{R\to\infty}\int_{\tilde{C}_2}\frac{e^{itz}}{z-1-ia}dz = 2\pi ie^{it}e^{-at}$
Im Limes $a\to 0^+$, $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{x-1-ia}dx \to 2\pi ie^{it}$

Anmerkung : Wenn $t > 0$, ist es leichter, das Integral $\int_{\tilde{C}_1}$ zu rechnen. Direkte Rechnungen des Integrals $\int_{\tilde{C}_2}$ ist nicht leicht (oder kann nicht möglich sein.)
In Allgemeinen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x-(u+iv)} dx = 2i\pi H(t) e^{it(u+iv)}$ für $v > 0$ und
$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x-(u+iv)} dx = -2i\pi H(-t) e^{it(u+iv)}$ für $v < 0$ (nachrechnen!)

9.2 Greensche Funktion (II)

a) Ansatz : $G_I(t,t') = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_I(\omega)\, e^{i\omega(t-t')} d\omega$
$\mathcal{L}_t G_I(t,t') = \delta(t-t') \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-\omega^2 + i\omega - 2)\tilde{G}_I(\omega)\, e^{i\omega(t-t')} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega$
Vergleich der Integranden: $(-\omega^2 + i\omega - 2)\tilde{G}_I(\omega) = 1$
$\to \tilde{G}_I(\omega) = -\frac{1}{\omega^2 - i\omega + 2} = -\frac{1}{(\omega+i)(\omega-2i)} = \frac{1}{3i}\left(\frac{1}{\omega+i} - \frac{1}{\omega-2i}\right)$
b) Fourier-Transformation $G_I(t,t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega) d\omega = \frac{1}{6\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega+i} d\omega - \frac{1}{6\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-2i} d\omega$
Aus Bsp.9.1cd $G_I(t,t') = -\frac{1}{3}H(t'-t)e^{t-t'} - \frac{1}{3}H(t-t')e^{-2(t-t')}$
c) $x_I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_I(t,t') f(t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} G_I(t,t') H(t') dt' = \int_0^{\infty} G_I(t,t') dt'$
Wenn $t < 0$ und $0 < t' < \infty$, gilt $t < t'$.
$x_I(t<0) = \int_0^{\infty} G_I(t,t') dt' = -\frac{1}{3}\int_0^{\infty} e^{t-t'} dt' = \frac{1}{3}e^{t-t'}\Big|_{t'=0}^{\infty} = -\frac{1}{3}e^t$
Wenn $t > 0$, ist der Integrand nicht null für $0 < t < t'$ und auch für $t > t'$.
$x_I(t>0) = -\frac{1}{3}\int_0^t e^{-2(t-t')} dt' - \frac{1}{3}\int_t^{\infty} e^{t-t'} dt' = -\frac{1-e^{-2t}}{6} - \frac{1}{3}$
$\lim_{t\to 0^+} x_I(t) = -\frac{1}{3}$ und $\lim_{t\to 0^-} x_I(t) = -\frac{1}{3}$
$\to x_I(0) = -\frac{1}{3}$
$x_I'(t<0) = -\frac{1}{3}e^t$ und $x_I'(t>0) = -\frac{1}{3}e^{-2t} \to \lim_{t\to 0} x_I'(t) = -\frac{1}{3}$
Lösung der homogenen Differentialgleichung $\mathcal{L}_t x_0(t) = 0$
$x_0(t) = Ae^t + Be^{-2t}$
$x(t) = x_I(t) + x_0(t) = x_I(t) + Ae^t + Be^{-2t}$
$x'(t) = x_I'(t) + x_0'(t) = x_I'(t) + Ae^t - 2Be^{-2t}$
$x(0) = -\frac{1}{3} + A + B = 0$
$x'(0) = -\frac{1}{3} + A - 2B = 0$
$\to A = \frac{1}{3}$ und $B = 0$
$\to x(t) = x_I(t) + \frac{e^t}{3} = -\frac{1}{3}H(-t)e^t + H(t)(-\frac{1-e^{-2t}}{6} - \frac{1}{3}) + \frac{1}{3}e^t = \frac{1}{3}H(t)e^t - H(t)(\frac{1-e^{-2t}}{6} + \frac{1}{3})$
$= -H(t)(\frac{1-e^{-2t}}{6} + \frac{1-e^t}{3})$
Anmerkung: aus der Lösung des Bsp.8.3
$G(t,t') = \alpha e^{-2(t-t')} + \beta e^{t-t'} + \frac{1}{3}H(t-t')(-e^{-2(t-t')} + e^{t-t'})$
$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_I(t,t') H(t') dt' = \int_0^{\infty} G_I(t,t') dt' = \int_0^{\infty}\left(\alpha e^{-2(t-t')} + \beta e^{t-t'} + \frac{1}{3}H(t-t')(-e^{-2(t-t')} + e^{t-t'})\right) dt'$
$= \frac{\alpha}{2}e^{-2(t-t')}\Big|_{t'=0}^{\infty} + \beta e^t - \frac{1}{6}H(t)(1-e^{-2t}) - \frac{1}{3}H(t)(1-e^t)$
Da Randbedingung $x(0) = 0$ ist, gilt $\alpha = 0$ und $\beta = 0$
$x(t) = -H(t)(\frac{1-e^{-2t}}{6} + \frac{1-e^t}{3})$
$x'(t) = -\delta(t)(\frac{1-e^{-2t}}{6} + \frac{1-e^t}{3}) - H(t)(\frac{e^{-2t}}{3} - \frac{e^t}{3}) \to x'(0) = 0$

9.3 Sturm-Liouville-Problem

Die Sturm-Liouville'schen Gestalt:
$\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + \lambda\rho(x)\right) y(x) = 0 \to p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0$
a) $y''(x) + 3y'(x) + (2+\lambda)y(x) = 0$
Vergleich mit der Differentialgleichung in der Sturm-Liouville'schen Gestalt :
$p'(x)/p(x) = 3$, $q(x)/p(x) = 2$ und $\lambda\rho(x)/p(x) = \lambda$
$\to \log(p(x)) = 3x \to p(x) = e^{3x}$, $q(x) = 2e^{3x}$ und $\rho(x) = e^{3x} \to \left(\frac{d}{dx}\left[e^{3x}\frac{d}{dx}\right] + 2e^{3x} + \lambda e^{3x}\right) y(x) = 0$
b) $x^2 y''(x) + xy'(x) + \lambda y(x) = 0$
Vergleich mit der Differentialgleichung in der Sturm-Liouville'schen Gestalt :
$p'(x)/p(x) = 1/x$, $q(x)/p(x) = 0$ und $\rho(x)/p(x) = 1/x^2$
$\to \log(p(x)) = \log x \to p(x) = x$, $q(x) = 0$ und $\rho(x) = 1/x \to \left(\frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}\right] + \frac{\lambda}{x}\right) y(x) = 0$