Name: Matr. Nr.:
Hörsaal: Sitzplatznummer:
Anzahl der abgegebenen Blätter (inkl. Deckblatt):

Mathematische Methoden der Theoretischen Physik (UE, 135.044)

Nachtest, 11. 3. 2022, 2021/22W

1 (30 Punkte)

$\mathbf{A}$ sei ein Tensor zweiter Stufe und erfüllt die Gleichungen $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i$ $(i = 1, 2)$. Die Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ lassen sich in einer Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ als $\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_j b^j{}_i$ darstellen und die Vektoren $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ lassen sich in der Basis $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ als $\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_j c^j{}_i$ darstellen. Die Transformationsmatrizen sind durch

$$\begin{pmatrix} b^1{}_1 & b^1{}_2 \\ b^2{}_1 & b^2{}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} c^1{}_1 & c^1{}_2 \\ c^2{}_1 & c^2{}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wie lauten die kontravarianten Komponenten d^{ij} des Tensors $\mathbf{D} = \mathbf{A}^n$ bezüglich der Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$?

2 (30 Punkte)

$\mathcal{B} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ sei eine nicht-orthonormale Basis. Die Komponenten des metrischen Tensors der Basis $\mathcal{B}$ sind durch

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

gegeben.
a) $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$ sei die duale Basis. Berechnen Sie die Koordinaten w^{ij} wobei $\mathbf{f}^i = w^{ij}\mathbf{f}_j$.
b) Ein Tensor zweiter Stufe $\mathbf{M}$ ist durch

$$\mathbf{M} = |\mathbf{f}_1\rangle\langle\mathbf{f}_1| - 2\,|\mathbf{f}_1\rangle\langle\mathbf{f}_2| - |\mathbf{f}_2\rangle\langle\mathbf{f}_1| + |\mathbf{f}_2\rangle\langle\mathbf{f}_2|$$

gegeben, Wie lauten die kovarianten Komponenten m_{ij} des Tensors $\mathbf{M}$ in der Basis $\mathcal{B}^*$?
c) Eine neue Basis ist durch $\mathbf{e}_i = \mathbf{f}_j s^j{}_i$ definiert. Finden Sie eine Transformationsmatrix $\mathbf{S} = (s^j{}_i)$ sodass die Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ orthonormal ist. Nehmen Sie an, dass $\mathbf{e}_2$ parallel zu $\mathbf{f}_2$ ist.

BITTE WENDEN

3 (40 Punkte)

a) Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$-\frac{1}{2x^2}\partial_x\left(x^2\partial_x\psi(x,y)\right)-\frac{1}{2x^2}\partial_y\left((2y-y^2)\partial_y\psi(x,y)\right)-\frac{1}{x}\psi(x,y)\;=E\psi(x,y)$$

wobei $x>0$, $0\le y\le 2$ und E eine Konstante ist. Mit dem Ansatz $\psi(x,y)=R(x)P(y)$ wird die Gleichung für $P(y)$ durch

$$(2y-y^2)P''(y)-2(y-1)P'(y)+ZP(y)=0$$

gegeben (Z: Konstante). Schreiben Sie die Gleichung für $R(x)$ an. Die Gleichungen in x- und y-Koordinaten müssen konsistent mit einander sein.
b) Verwenden Sie den Ansatz $P(y)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n y^{n+\sigma}$ ($u_0\ne 0$) und bestimmen Sie den charakteristischen Exponent σ der Differentialgleichung für $P(y)$ aus (b) und die Rekursionsrelation der Koeffizienten u_n. (Hinweis : Es gibt nur einen charakteristischen Exponent.)
c) Geben Sie eine Lösung $P_{Z=2}(y)$ der Differentialgleichung für $Z=2$ und eine andere Lösung $P_{Z=6}(y)$ für $Z=6$ an.
d) Bestimmen Sie eine Gewichtsfunktion $w(y)$ sodass die Lösungen aus (c) im folgenden Sinne orthogonal zueinander sind,

$$\int_0^2 P_{Z=2}(y)w(y)P_{Z=6}(y)dy=0.$$

(Die Lösung $w(y)\equiv 0$ gibt keine Punkte!)