Nachtest - Lösungen **11.3.2022**

1 [30 Punkte]

$\mathbf{y}_1 = -\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{y}_2 = 5\mathbf{x}_2 \to \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = -\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = 5\mathbf{x}_2$
$\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ sind die Eigenvektoren des Tensors $\mathbf{A}$.
$\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \to \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0$ (orthogonal)
Spektraltheorem $\mathbf{A} = -\frac{|\mathbf{x}_1\rangle\langle\mathbf{x}_1|}{\langle\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_1\rangle} + 5\frac{|\mathbf{x}_2\rangle\langle\mathbf{x}_2|}{\langle\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_2\rangle} = 2|\mathbf{e}_1\rangle\langle\mathbf{e}_1| - 3|\mathbf{e}_1\rangle\langle\mathbf{e}_2| - 3|\mathbf{e}_2\rangle\langle\mathbf{e}_1| + 2|\mathbf{e}_2\rangle\langle\mathbf{e}_2|$
$\mathbf{D} = \mathbf{A}^n = (-1)^n \frac{|\mathbf{x}_1\rangle\langle\mathbf{x}_1|}{\langle\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_1\rangle} + 5^n \frac{|\mathbf{x}_2\rangle\langle\mathbf{x}_2|}{\langle\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_2\rangle}$
$= \frac{1}{2}\left(((-1)^n + 5^n)|\mathbf{e}_1\rangle\langle\mathbf{e}_1| + ((-1)^n - 5^n)|\mathbf{e}_1\rangle\langle\mathbf{e}_2| + ((-1)^n - 5^n)|\mathbf{e}_2\rangle\langle\mathbf{e}_1| + ((-1)^n + 5^n)|\mathbf{e}_2\rangle\langle\mathbf{e}_2|\right)$

2 [30 Punkte]

a) $\mathbf{f}^i = g^{ij}\mathbf{f}_j \to w^{ij} = g^{ij}$ wobei $(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
b) $\mathbf{M} = m^{ij}|\mathbf{f}_i\rangle\langle\mathbf{f}_j| = m_{ij}|\mathbf{f}^i\rangle\langle\mathbf{f}^j|$ wobei $m_{ij} = g_{ik}m^{k\ell}g_{\ell j}$ und $(m_{ij}) = \begin{pmatrix} -5 & -12 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$
c) $\mathbf{e}_2 = c\mathbf{f}_2$, Normierung : $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = c^2\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2 = c^2 g_{22} = 1 \to c = 1/3$
$\mathbf{e}_1$ is orthogonal zu $\mathbf{e}_2$ und auch $\mathbf{f}_2 \to \mathbf{e}_1 = d\mathbf{f}^1$
Normierung $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = d^2 g^{11} = 1 \to d = 1 \to \mathbf{e}_1 = \mathbf{f}^1 = \mathbf{f}_1 - (1/3)\mathbf{f}_2$
$(s^j{}_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

3 [40 Punkte]

a) $\mathcal{L}_x = \partial_x\left(x^2\partial_x\right)$ und $\mathcal{L}_y = \partial_y\left((2y - y^2)\partial_y\right) = (2y - y^2)\partial_y^2 - 2(y-1)\partial_y$
Differentialgleichung : $-\frac{1}{2x^2}P(y)\mathcal{L}_x R(x) - \frac{1}{2x^2}R(x)\mathcal{L}_y P(y) - \frac{1}{x}R(x)P(y) = ER(x)P(y)$
$\to \frac{1}{R(x)}\mathcal{L}_x R(x) + 2x + 2x^2 E = -\frac{1}{P(y)}\mathcal{L}_y P(y)$
Da die Gleichung für beliebige x und y gilt, müssen die beiden Seite konstant sein.
$\frac{1}{R(x)}\mathcal{L}_x R(x) + 2x + 2x^2 E = -\frac{1}{P(y)}\mathcal{L}_y P(y) = Z$
$\to \partial_x\left(x^2\partial_x R(x)\right) + 2xR(x) + 2x^2 ER(x) - ZR(x) = 0$ und $(2y - y^2)P''(y) - 2(y-1)P'(y) + ZP(y) = 0$
b) $(2y - y^2)\sum_{n=0}^{\infty} u_n(n+\sigma)(n+\sigma-1)y^{n+\sigma-2} - 2(y-1)\sum_{n=0}^{\infty} u_n(n+\sigma)y^{n+\sigma-1} + Z\sum_{n=0}^{\infty} u_n y^{n+\sigma} = 0$
$\to \sum_{n=0}^{\infty} u_n[-(n+\sigma)(n+\sigma-1) - 2(n+\sigma) + Z]y^{n+\sigma} + \sum_{n=0}^{\infty} u_n[2(n+\sigma)(n+\sigma-1) + 2(n+\sigma)]y^{n+\sigma-1} = 0$
$\to \sum_{n=0}^{\infty} u_n[-(n+\sigma)(n+\sigma+1) + Z]y^{n+\sigma} + \sum_{n=-1}^{\infty} 2u_{n+1}(n+\sigma+1)^2 y^{n+\sigma} = 0$
Koeffizientenvergleich
$y^{\sigma-1}$ Term : $u_0\sigma^2 = 0 \to \sigma = 0$ weil $u_0 \neq 0$
$y^{n+\sigma}$ Term $(n \geq 0)$: $u_n[-(n+\sigma)(n+\sigma+1) + Z] + 2u_{n+1}(n+\sigma+1)^2 = 0$
$\to u_{n+1} = \frac{(n+\sigma)(n+\sigma+1)-Z}{2(n+\sigma+1)^2}u_n = \frac{n(n+1)-Z}{2(n+1)^2}u_n$
c) Wenn $Z = 2$, $u_{n+1} = \frac{n(n+1)-2}{2(n+1)^2}u_n$
$u_1 = -u_0$, $u_2 = 0$ und $u_n = 0$ für $n \geq 3 \to P_{Z=2}(y) = (-y+1)u_0$
Wenn $Z = 6$, $u_{n+1} = \frac{n(n+1)-6}{2(n+1)^2}u_n$
$u_1 = -3u_0$, $u_2 = -\frac{1}{2}u_1 = \frac{3}{2}u_0$, $u_3 = 0$ und $u_n = 0$ für $n \geq 4 \to P_{Z=6}(y) = ((3/2)y^2 - 3y + 1)u_0$
d) Die Sturm-Liouville'schen Gestalt: $\partial_y\left((2y - y^2)\partial_y P(y)\right) + ZP(y) = 0$ wobei Z der Eigenwert ist. $w(y) = 1$