Name: Tutoriumsgruppe:
Matr. Nr.: Hörsaal: Sitzplatznummer:
Anzahl der abgegebenen Blätter (inkl. Deckblatt):

Mathematische Methoden der Theoretischen Physik (UE, 135.044)

1. Test, 19. 11. 2021, 2021W

1 (35 Punkte)

a) Die Bewegungsgleichung des Larmorpräzessions ist mit einer Konstante γ durch

$$\frac{d}{dt}\mathbf{d}(t) = \gamma\mathbf{d}(t) \times \mathbf{B}$$

gegeben, wobei $\mathbf{d}(t)$ ein zeitabhängiges Dipolmoment und $\mathbf{B}$ ein konstantes Magnetfeld ist ($\mathbf{d}(t)$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^3$). Schreiben Sie die Gleichung mit Hilfe der Indexschreibweise bezüglich einer Orthonormalbasis an

b) Schreiben Sie die Gleichung aus (a) in die Matrixdarstellung

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

bezüglich einer Orthonormalbasis um, und bestimmen Sie die Elemente der 3×3 Matrix X.

c) Die Matrix B ist eine 2×2 Matrix und kommutiert ($[A, B] = 0$) mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$. Die Eigenwerte ($\lambda_1$, λ_2) der Matrix B sind ungleich, d.h. $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Schreiben Sie zwei linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix B an.

d) Berechnen Sie das Volumen des von den Vektoren $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k$ gebildeten Parallelepipedes ($1 \leq i, j, k, \leq 3$), wobei $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ eine Orthonormalbasis ist.

e) Ein Vektor $\mathbf{x}$ lässt sich in einer ortsunabhängigen nicht-orthonormalen Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 . \mathbf{f}_3\}$ als $\mathbf{x} = x^i \mathbf{f}_i$ darstellen. Berechnen und vereifachen Sie $x^i \partial_i (x^j x_j)$, wobei $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.

---

2 (25 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{W}\mathbf{r}(t)$$

wobei $\mathbf{W}$ ein Tensor zweiter Stufe und durch $\mathbf{W} = \omega_1|\mathbf{v}_1\rangle\langle\mathbf{v}_1| + \omega_2|\mathbf{v}_2\rangle\langle\mathbf{v}_2|$ definiert ist ($\omega_1 \neq \omega_2$). Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ lassen sich in einer Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ als $\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_j s_{ji}$ mit

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

darstellen.

a) Schreiben Sie die Eigenvektoren des Tensors $\mathbf{W}$ an.

b) Sei $\mathbf{P}_i$ eine Orthogonalprojektion auf dem Vektor $\mathbf{v}_i$ ($i = 1, 2$). Zeigen Sie, $\frac{d}{dt}\mathbf{y}_i(t) = \omega_i \mathbf{y}_i(t)$ wobei $\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{P}_i \mathbf{r}(t)$.

c) Die Lösung der Differentialgleichung wird als $\mathbf{r}(t) = \mathbf{Z}\,\mathbf{r}(t = 0)$ gegeben. Wie lauten die Komponenten z_{ij} des Tensors $\mathbf{Z}$ bezüglich der Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$?

3 (40 Punkte)

Ein Tensor zweiter Stufe $\mathbf{A}$ ist durch

$$\mathbf{A} = 4\,|\mathbf{f}_1\rangle\langle\mathbf{f}^1| + 5\,|\mathbf{f}_1\rangle\langle\mathbf{f}^2| - \,|\mathbf{f}_2\rangle\langle\mathbf{f}^1| - 2\,|\mathbf{f}_2\rangle\langle\mathbf{f}^2|$$

gegeben, wobei $\mathcal{B} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ eine nicht-orthonormale Basis und $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$ die zugehörige duale Basis ist. Die kovarianten Komponenten des metrischen Tensors bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ ist durch

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$) und die Rechtseigenvektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, die die Eigenwertgleichung $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_{\underline{i}}\mathbf{x}_{\underline{i}}$ erfüllt (ohne Summe über i). Bestimmen Sie die Koordinaten $x^j{}_i$ wobei $\mathbf{x}_i = x^j{}_i \mathbf{f}_j$. Hinweis : Sei $x^2{}_i = 1$ und bestimmen Sie nur $x^1{}_i$. (Die Eigenvektoren muss nicht normiert sein.)

b) Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, linear unabhängig von einander ist.

c) Finden Sie die dualen Basis $\mathcal{X}^* = \{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2\}$ zur (nicht-orthonormalen) Basis $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ und bestimmen Sie die Koordinaten $h^i{}_j$ wobei $\mathbf{x}^i = h^i{}_j \mathbf{f}^j$.

d) Sei V der von der Basis $\mathcal{B}$ aufgespannte Vektorraum. Finden Sie eine Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ von V und bestimmen Sie die Transformationsmatrix $\mathbf{Q}$, wobei $q^i{}_j \mathbf{f}_i = \mathbf{e}_j$. Nehmen Sie an, dass $\mathbf{e}_1$ parallel zu $\mathbf{f}_1$ ist.

e) Wie lauten die Komponenten a'_{ij} des Tensors $\mathbf{A}$ in der Orthonormalbasis aus (d)?