1. Test - Lösungen **19.11.2021**

1 [35 Punkte]

a)[6] $\frac{d}{dt}d_i = \gamma\varepsilon_{ijk}d_jB_k$
Alternativ : Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$
$\frac{d}{dt}d_i\mathbf{e}_i = \gamma d_j\mathbf{e}_j \times B_k\mathbf{e}_k = \gamma\varepsilon_{ijk}d_jB_k\mathbf{e}_i$
b)[6] $\frac{d}{dt}d_i = X_{ij}d_j \to X_{ij} = \gamma\varepsilon_{ijk}B_k$

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 \\ -B_3 & 0 & B_1 \\ B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

c)[8] $[A, B] = 0 \to AB = BA$
Wenn x ein Eigenvektor der Matrix A ist, $Ax = \alpha x$. $\to A(Bx) = BAx = \alpha Bx$. Bx ist ein Eigenvektor der Matrix A mit dem Eigenwert α.
$\to Bx = \beta x$, d.h. x ist auch ein Eigenvektor der Matrix B.
$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \to (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$

Sei $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -5-\lambda & -3 \\ -3 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-\lambda-3a \\ -3+3a-\lambda a \end{pmatrix} = 0$

$\to 0 = (-5-\lambda-3a)a - (-3+3a-\lambda a) = -3a^2 - 8a + 3 = -(3a-1)(a+3) \to a = 1/3, -3$
Die Eigenvektoren von A sind $(1, -3)$ und $(3, 1)$. Sie sind auch die Eigenvektoren der Matirx B.
(Eigenvektoren $c_1(1, -3)$ und $c_2(3, 1)$ $(c_1, c_2 \neq 0)$ sind auch korrekt)
d)[6] Wenn (i, j, k) eine Permutation von $(1, 2, 3)$ ist, ist das Parallelepiped ein Einheitswürfel, d.h. $V = 1$.
Sonst $V = 0$
alternativ : Volumen $V = |\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)| = |\mathbf{e}_i \cdot \varepsilon_{\ell jk}\mathbf{e}_\ell| = |\varepsilon_{\ell jk}\delta_{i\ell}| = |\varepsilon_{ijk}|$
e) [9] $x^i\partial_i(x^jx_j) = x^i(\partial_ix^j)x_j + x^ix^j(\partial_ix_j) = x^i(\partial_ix^j)x_j + x^ix^j(\partial_ix^kg_{kj})$ (oder $= x^i(\partial_ix^j)x_j + x^ix^j(g_{ik}\partial^kx_j)$)
$= x^i\delta_i^jx_j + x^ix^j\delta_i^kg_{kj} = x^ix_i + x^ix^jg_{ij} = 2x^ix_i = 2|\mathbf{x}|^2$
alternativ : $x^i\partial_i(x^jx_j) = \mathbf{x} \cdot \nabla|\mathbf{x}|^2$
Das Ergebnis ist unabhängig von der Basis
In einer Orthonormalbasis, $\mathbf{x} \cdot \nabla|\mathbf{x}|^2 = x'_i\partial'_i(x'_jx'_j) = x'_i2x'_j\delta_{ij} = 2|\mathbf{x}|^2$

2 [25 Punkte]

a)[8] $\langle\mathbf{v}_i|\mathbf{v}_j\rangle = \delta_{ij}$: Orthonormalbasis
$\mathbf{W}|\mathbf{v}_i\rangle = \sum_j \omega_j|\mathbf{v}_j\rangle\langle\mathbf{v}_j|\mathbf{v}_i\rangle = \sum_j \omega_j\delta_{ij}|\mathbf{v}_j\rangle = \omega_{\underline{i}}|\mathbf{v}_{\underline{i}}\rangle$ (ohne Summe über i)
$\mathbf{v}_i$: Eigenvektoren des Tensors $\mathbf{W}$
b) [6] $\frac{d}{dt}|\mathbf{y}_i(t)\rangle = \frac{d}{dt}\mathbf{P}_i|\mathbf{r}(t)\rangle = \mathbf{P}_i\frac{d}{dt}|\mathbf{r}(t)\rangle = \mathbf{P}_i\mathbf{W}|\mathbf{r}(t)\rangle$
$= |\mathbf{v}_i\rangle\langle\mathbf{v}_i|\sum_j \omega_j|\mathbf{v}_j\rangle\langle\mathbf{v}_j|\mathbf{r}(t)\rangle = \omega_i|\mathbf{v}_i\rangle\langle\mathbf{v}_i|\mathbf{r}(t)\rangle = \omega_i\mathbf{P}_i|\mathbf{r}(t)\rangle$
c) [11] $\mathbf{r} = r_i\mathbf{e}_i = r'_i\mathbf{v}_i$ mit $r_i = r'_js_{ij}$
$\mathbf{y}_i(t) = e^{\omega_{\underline{i}}t}\mathbf{P}_{\underline{i}}|\mathbf{r}(0)\rangle$
$\mathbf{r}(t) = \sum_i \mathbf{P}_i\mathbf{r}(t) = \sum_i \mathbf{y}_i(t) = (\sum_i e^{\omega_{\underline{i}}t}\mathbf{P}_{\underline{i}})|\mathbf{r}(0)\rangle$
$\mathbf{Z} = \sum_i e^{\omega_it}\mathbf{P}_i$
$\mathbf{P}_i = |\mathbf{v}_{\underline{i}}\rangle\langle\mathbf{v}_{\underline{i}}| = s_{j\underline{i}}s_{k\underline{i}}|\mathbf{e}_j\rangle\langle\mathbf{e}_k|$ (ohne Summe über i)
$z_{jk} = \sum_i s_{ji}e^{\omega_it}s_{ki}$
Alternative Lösung :
a) In der Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$

$|\mathbf{v}_1\rangle\langle\mathbf{v}_1| \to \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$ und $|\mathbf{v}_2\rangle\langle\mathbf{v}_2| \to \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{W} \to \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9\omega_1 + 16\omega_2 & 12(\omega_1 - \omega_2) \\ 12(\omega_1 - \omega_2) & 16\omega_1 + 9\omega_2 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren : $\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9\omega_1 + 16\omega_2 & 12(\omega_1 - \omega_2) \\ 12(\omega_1 - \omega_2) & 16\omega_1 + 9\omega_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\omega_1 + 16\omega_2 + 12x(\omega_1 - \omega_2) \\ 12(\omega_1 - \omega_2) + x(16\omega_1 + 9\omega_2) \end{pmatrix}$ muss parallel zum $(1, x)$ sein.

$x(9\omega_1 + 16\omega_2) + 12x^2(\omega_1 - \omega_2) = 12(\omega_1 - \omega_2) + x(16\omega_1 + 9\omega_2)$
$12x^2(\omega_1 - \omega_2) - 7x(\omega_1 - \omega_2) - 12(\omega_1 - \omega_2) = 0$
$(3x - 4)(4x + 3) = 0 \rightarrow x = 4/3, -3/4$
Eigenvektoren $(3, 4)$ und $(-4, 3)$ (oder $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ wenn normiert)
b) In der Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$

$$\mathbf{y}_1(t) \rightarrow \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}_1(t) \rightarrow \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9\omega_1 + 16\omega_2 & 12(\omega_1 - \omega_2) \\ 12(\omega_1 - \omega_2) & 16\omega_1 + 9\omega_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\omega_1}{25}\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_2(t) \rightarrow \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}_2(t) \rightarrow \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9\omega_1 + 16\omega_2 & 12(\omega_1 - \omega_2) \\ 12(\omega_1 - \omega_2) & 16\omega_1 + 9\omega_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\omega_2}{25}\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

c) Aus b)

$$\mathbf{y}_1(t) = e^{i\omega_1 t}\mathbf{y}_1(0) \rightarrow \frac{e^{\omega_1 t}}{25}\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1(0) \\ r_2(0) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_2(t) = e^{i\omega_2 t}\mathbf{y}_2(0) \rightarrow \frac{e^{\omega_2 t}}{25}\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1(0) \\ r_2(0) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{y}_1(t) + \mathbf{y}_2(t) \rightarrow \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9e^{\omega_1 t} + 16e^{\omega_2 t} & 12(e^{\omega_1 t} - e^{\omega_2 t}) \\ 12(e^{\omega_1 t} - e^{\omega_2 t}) & 16e^{\omega_1 t} + 9e^{\omega_2 t} \end{pmatrix}$$

3 [40 Punkte]

a)[8] Eigenwertgleichung : $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$
$\langle \mathbf{f}^i | (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) | \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{f}^i | (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) x^j | \mathbf{f}_j \rangle = (a^i{}_j - \lambda\delta^i_j)x^j$
Eigenwerte :

$$\det(a^i{}_j - \lambda\delta^i_j) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2) + 5 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \rightarrow \lambda = 3, -1$$

Eigenvektoren :

$$\begin{pmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ -1 & -2 - \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^1 - \lambda x^1 + 5x^2 \\ -x^1 - 2x^2 - \lambda x^2 \end{pmatrix} = 0$$

Wenn $\lambda = \lambda_1 = 3$, $(x^1{}_1, x^2{}_1) = (-5, 1)$
Wenn $\lambda = \lambda_2 = -1$, $(x^1{}_2, x^2{}_2) = (-1, 1)$
b)[7] Wenn $\mathbf{x}_i$ linear unabhängig, müssen b^1 und b^2 für $b^i\mathbf{x}_i = 0$ verschwiden.
$b^i\mathbf{x}_i = b^i s^j{}_i \mathbf{f}_j = 0 \rightarrow$ Weil $\mathbf{f}_j$ linear unabhängig (eine Basis) ist, $b^i s^1{}_i = 0$ und $b^i s^2{}_i = 0$.
Wenn $\mathbf{S}^{-1}$ existiert, gilt $b^1 = 0$ und $b^2 = 0$.

$$\det\mathbf{S} = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

alternativ : linear unabhängig $\rightarrow$ $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ nicht parallel
$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = (-5\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) \times (-\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) = -5\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_2 \times \mathbf{f}_1 = -4\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2$
Für eine Basis sind $\mathbf{f}_1$ und $\mathbf{f}_2$ linear unabhängig und $\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 \neq 0 \rightarrow \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \neq 0$
c)[7] $\mathbf{x}_i = s^j{}_i \mathbf{f}_j$ und $\mathbf{x}^i = h^i{}_j \mathbf{f}^j$
Orthogonalität der dualen Basis : $\delta^i_j = \mathbf{x}^i \cdot \mathbf{x}_j = h^i{}_k \mathbf{f}^k \cdot s^\ell{}_j \mathbf{f}_\ell = h^i{}_k s^\ell{}_j \delta^k_\ell = h^i{}_k s^k{}_j$

$$\mathbf{H} = \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{x}^1 = -(1/4)(\mathbf{f}^1 + \mathbf{f}^2)$ und $\mathbf{x}^2 = (1/4)(\mathbf{f}^1 + 5\mathbf{f}^2)$
d) [10] Wir nehmen an, dass $\mathbf{e}_1 = c\mathbf{f}_1$. Normierung : $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = c^2\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1 = c^2 g_{11} = c^2 = 1 \rightarrow \mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1$
$\mathbf{e}_2$ ist orthogonal zu $\mathbf{e}_1$, d.h. orthogonal zu $\mathbf{f}_1 \rightarrow \mathbf{e}_2 = c\mathbf{f}^2 = cg^{2i}\mathbf{f}_i$

$$\text{metrischer Tensor bezüglich der dualen Basis } (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{e}_2 = \frac{c}{4}(-3\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2)$ mit Normierung : $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = c^2/4 = 1 \rightarrow c = 2 \rightarrow \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}(-3\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2)$

$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}(3\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2)$ auch korrekt. In den Fall $Q = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

alternative : mit Gram-Schmidt Verfahren : $\mathbf{y} = \mathbf{f}_2 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{f}_2)\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_2 - (\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2)\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2 - g_{12}\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2 - 3\mathbf{f}_1$

$\mathbf{e}_2 = c\mathbf{y}$ (siehe oben für die Normierungsfaktor c)

e)[8] $a'_{ij} = \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{A} | \mathbf{e}_j \rangle = q^k{}_i \langle \mathbf{f}_k | \mathbf{A} | \mathbf{f}_\ell \rangle q^\ell{}_j = q^k{}_i g_{km} \langle \mathbf{f}^m | \mathbf{A} | \mathbf{f}_\ell \rangle q^\ell{}_j = q^k{}_i g_{km} a^m{}_\ell q^\ell{}_j$

$(a'_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Wenn $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}(3\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2)$, $(a'_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$