Name: Tutoriumsgruppe:
Matr. Nr.: Hörsaal: Sitzplatznummer:
Anzahl der abgegebenen Blätter (inkl. Deckblatt):

Mathematische Methoden der Theoretischen Physik (UE, 135.044)

2. Test, 21. 01. 2022, 2021W

1 (50 Punkte)

– jeweils 10 Punkte

a) Berechnen Sie

$$\int_0^1 e^x\,\delta(1-3x)\,dx.$$

b) Stellen Sie für reele Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x, y \leq 1$ die Menge $\{x, y \in [0,1] \,|\, H(1-x-y) = 1\}$ in einer graphischen Skizze dar und berechnen Sie

$$\int_0^1 \int_0^1 H(1-x-y)\,dy\,dx, \qquad H \ldots \text{Heaviside-Funktion.}$$

c) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(1-x^2)y\partial_x^2\psi(x,y) - xy\partial_x\psi(x,y) + 2\partial_y\psi(x,y) = 0, \quad x, y \in [-1,1].$$

Wenden Sie den Separations Ansatz $\psi(x,y) = f(x)g(y)$ an, und geben Sie die entsprechenden Differentialgleichungen für $f(x)$ und $g(y)$ an.

d) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) + \lambda f(x) = 0, \quad x \in [-1,1],$$

mit einer Konstante λ. Wenden Sie den Ansatz $f(x) = a_0 + a_2x^2$ an um eine Lösung der Differentialgleichung mit $f(1) = 1$ zu bestimmen, dazu müssen Sie auch λ passend wählen!

e) Seien y_n Funktionen welche für $n = 0, 1, 2, \ldots$ die Differentialgleichungen

$$xy_n''(x) + (1-x)y_n'(x) + ny_n(x) = 0, \quad x \in [0,\infty),$$

erfüllen. Leiten Sie eine Gewichtsfunktion $\rho(x)$ her, sodass die Funktionen y_n die folgende Orthogonalitätseigenschaft erfüllen,

$$\int_0^\infty \rho(x)y_n(x)y_m(x)\,dx = 0, \quad n, m = 0, 1, 2, \ldots, \quad n \neq m.$$

BITTE WENDEN

2 (20 Punkte)

Seien $(x^1, x^2) = (x, y)$ die Koordinaten bezüglich der kartesischen Basis mit $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$. Wir betrachten Polarkoordinaten $(x'^1, x'^2) = (r, \theta)$ welche durch die Koordinatentransformation $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ definiert sind, $r > 0$ und $\theta \in [0, 2\pi)$.

a) Die lokale Transformation sei durch $\mathbf{dx} = dx^i \mathbf{e}_i = dx'^i \mathbf{e}'_i$ definiert (wobei $\mathbf{e}'_i$ hier nicht normalisiert sein muss). Berechnen Sie die entsprechende Transformationsmatrix $\mathbf{S}$, den metrischen Tensor $\mathbf{g}'$ und $V = \sqrt{\det \mathbf{g}'}$.

b) Zeigen Sie, für die Polarkoordinaten und eine Funktion $\phi : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ gilt

$$\nabla\phi(r, \theta) \cdot \mathbf{x} = r\partial_r \phi(r, \theta).$$

3 (30 Punkte)

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Residuensatzes, dass das folgende Ergebnis gilt,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{six}}{(x - iw_0)(x - iw_1)} dx = \frac{-2\pi(e^{-sw_0} - e^{-sw_1})}{w_0 - w_1}, \quad \mathbf{s} < \mathbf{0}, \ \ w_0, w_1 < 0, \ \ w_0 \neq w_1.$$

b) Berechnen Sie die Greensche Funktion $G(t, t')$ der Differentialgleichung

$$\mathcal{L}_t = \Big(\frac{d}{dt} - 2\Big)\Big(\frac{d}{dt} - 3\Big).$$

Zusätzlich zu dem Ergebnis aus (a), dürfen Sie in (b) das folgende Ergebnis verwenden,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{six}}{(x - iw_0)(x - iw_1)} dx = 0, \quad \mathbf{s} > \mathbf{0}, \ \ w_0, w_1 < 0, \ \ w_0 \neq w_1.$$
