2. Test - Lösungen **21.01.2022**

1 [jeweils 10 Punkte]

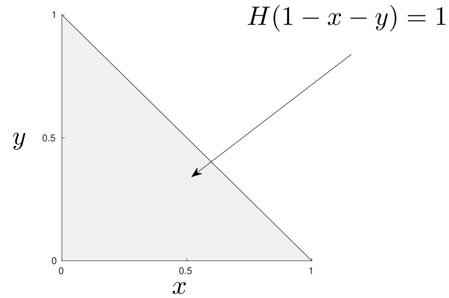
a) Substituieren $y = -3x$, $dy = -3dx$, Integralgrenzen $y = 0 \ldots -3$:

$$\int_0^1 e^x\,\delta(1-3x)\,dx = -\frac{1}{3}\int_0^{-3} e^{-y/3}\,\delta(1+y)\,dy = \frac{1}{3}\int_{-3}^0 e^{-y/3}\,\delta(y+1)\,dy = \frac{1}{3}e^{1/3}.$$

alternativ : $\delta(1-3x) = (1/3)\delta(x-1/3)$, $\int_0^1 e^x\,\delta(1-3x)\,dx = \int_0^1 e^x\,(1/3)\delta(x-1/3)\,dx = \frac{1}{3}e^{1/3}$.

b) Die Werte von (x, y) mit $1 - x - y = 0$ entsprechen einer Geraden mit $y = 1 - x$.

Wobei $1 - x - y > 0$ für $1 - x > y$
Daher gilt $H(1 - x - y) = 1$ für
$\{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x \in [0, 1] \text{ und } y \in [0, 1 - x]\}$.
$\int_0^1 \int_0^1 H(1 - x - y)\,dy\,dx$
$= \int_0^1 \int_0^{1-x} 1\,dy\,dx$
$= \int_0^1 1 - x\,dx = [x - x^2/2]|_{x=0}^1 = 1/2$
oder (graphisch) die Fläche für welche $H(1 - x - y) = 1$, das entspricht dem Dreieck in der Skizze mit Flächeninhalt $= 1/2$



c) $\psi(x, y) = f(x)g(y)$
$(1 - x^2)yf''(x)g(y) - xyf'(x)g(y) + 2f(x)g'(y) = 0$
$\frac{(1-x^2)f''(x)-xf'(x)}{f(x)} = \frac{-2g'(y)}{yg(y)}$
Gleichung gilt unabhängig von x, y, beide Seiten gleich setzen mit einer Konstante λ.
Differentialgleichung in y: $g'(y) = \frac{-\lambda y}{2}g(y)$
Differentialgleichung in x: $(1 - x^2)f''(x) - xf'(x) - \lambda f(x) = 0$

d) Ansatz: $f(x) = a_0 + a_2x^2$ für Differentialgleichung $(1 - x^2)f''(x) - xf'(x) + \lambda f(x) = 0$.
Ableitungen $f'(x) = 2a_2x$ und $f''(x) = 2a_2$ in die Differentialgleichung einsetzen
$(1 - x^2)f''(x) - xf'(x) + \lambda f(x) = 2(1 - x^2)a_2 - 2a_2x^2 + \lambda(a_0 + a_2x^2) = 0$
Koeffizientenvergleich:
x^2: $\quad -4a_2x^2 + \lambda a_2x^2 = 0, \to a_2 = 0$ oder $\lambda = 4$
x^0: $\quad 2a_2 + \lambda a_0 = 0 \to a_2 = -\frac{\lambda}{2}a_0$
Wenn $a_2 = 0$, $a_0 = -\frac{2a_2}{\lambda} = 0$. $f(x) = 0$ erfüllt nicht die Randbedingung $f(1) = 1$.
Wenn $\lambda = 4$, $a_2 = -2a_0$ Lösung lautet $f(x) = (1 - 2x^2)a_0$, für $x = 1$ soll gelten $f(1) = 1$, wir erhalten $a_0 = -1$: $f(x) = 2x^2 - 1$.

e) Differentialgleichung in Sturm-Liouville'sche Gestalt $(p(x)y'(x))' + \lambda\rho(x)y(x)$, wobei $q(x) = 0$.
vergleich mit ursprünglicher Form $y''(x) + \frac{p'(x)}{p(x)}y'(x) + \lambda\frac{\rho(x)}{p(x)}y(x) = 0$
mit $p'(x)/p(x) = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1 \to \log p = \log x - x \to p(x) = xe^{-x}$
$\frac{\rho(x)}{p(x)} = \frac{1}{x}$, also gilt $\rho(x) = \frac{p(x)}{x} = e^{-x}$
Die Funktionen y_n sind Eigenfunktionen einer Sturm-Liouville Differentialgleichung mit Eigenwerten $\lambda_n = n$ und Gewichtsfunktion $\rho(x) = e^{-x}$, daher erfüllen die Funktionen y_n die gewünschte Orthogonalitätseigenschaft mit dieser Gewichtsfunktion.

2 [20 Punkte]

a) $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$
$\mathbf{S} = \{\mathbf{e}'_r, \mathbf{e}'_\theta\} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$ Transformationsmatrix ergibt sich aus Tangentialvektoren

$\mathbf{g}' = \mathbf{S}^T\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$
$V = \sqrt{\det \mathbf{g}'} = r$

b) In Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ geschrieben haben wir
$\mathbf{e}'_r = \cos(\theta)\mathbf{e}_1 + \sin(\theta)\mathbf{e}_2$, und $\mathbf{e}'_\theta = -r\sin(\theta)\mathbf{e}_1 + r\cos(\theta)\mathbf{e}_2$.
Wir haben $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$, $x = r\cos(\theta)$ und $y = r\sin(\theta)$ ergibt $\mathbf{x} = r\mathbf{e}'_r$.
Gradient in Polarkoordinaten schreiben
$\nabla\phi(r,\theta) = \mathbf{e}'^r\partial_r\phi(r,\theta) + \mathbf{e}'^\theta\partial_\theta\phi(r,\theta)$ mit dualer Tangentialbasis $\{\mathbf{e}'^r, \mathbf{e}'^\theta\}$
$\mathbf{x} = r\mathbf{e}'_r$ einsetzen ergibt die gewünschte Identität.

3 [30 Punkte]

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isx}}{(x-iw_0)(x-iw_1)}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{isx}}{(x-iw_0)(x-iw_1)}\, dx$
Notation: Kurve '$\to$' von $-R$ bis R, '$\leftarrow$' von R bis $-R$ in negative Richtung
Kurve $\circlearrowleft$, parametrisiert $x = Re^{i\theta}$ mit θ von π bis 2π.
Wir haben $\int_\to = -\int_\leftarrow$ und $\int_\leftarrow = \int_{\leftarrow\&\circlearrowleft} - \int_\circlearrowleft$

Wir zeigen, das Integral über die Kurve '$\circlearrowleft$' verschwindet für $R \to \infty$.
Transformieren, $x = Re^{i\theta}$, $dx = iRe^{i\theta}d\theta$
$\int_\circlearrowleft \frac{e^{isx}}{(x-iw_0)(x-iw_1)}\, dx = \int_\pi^{2\pi} \frac{iRe^{i\theta}e^{isRe^{i\theta}}}{(Re^{i\theta}-iw_0)(Re^{i\theta}-iw_1)}\, d\theta$
Nebenrechnung:
$isRe^{i\theta} = isR\cos(\theta) - sR\sin(\theta)$
$|iRe^{i\theta}e^{isRe^{i\theta}}| = Re^{-sR\sin(\theta)}$
$e^{-sR\sin(\theta)} \leq 1$ weil $\sin(\theta) \leq 0$ für $\theta \in [\pi, 2\pi]$ und $s < 0$.
$\frac{R}{|(Re^{i\theta}-iw_0)(Re^{i\theta}-iw_1)|} \sim \frac{1}{R}$ für $R \to \infty$.
$\left|\int_\pi^{2\pi} \frac{iRe^{i\theta}e^{isRe^{i\theta}}}{(Re^{i\theta}-iw_0)(Re^{i\theta}-iw_1)}\, d\theta\right| \leq \int_\pi^{2\pi} \frac{R}{|(Re^{i\theta}-iw_0)(Re^{i\theta}-iw_1)|}\, d\theta \to 0, \quad$ für $\quad R \to \infty$.
Daher, Integral über die Kurve ' $\circlearrowleft$' verschwindet für $R \to \infty$.

Für das Integral über die geschlossene Kurve ' $\to \&\circlearrowleft$' wenden wir den Resdiuensatz an, die Singularitäten des Integranden innerhalb der geschlossenen Kurve (für R groß genug) sind iw_0 und iw_1, wir erhalten
$\mathrm{Res}_{x\to iw_0}\left[\frac{e^{isx}}{(x-iw_0)(x-iw_1)}\right] = \left(\frac{e^{isx}}{x-iw_1}\right)\Big|_{x=iw_0} = \frac{e^{-sw_0}}{i(w_0-w_1)}$
$\mathrm{Res}_{x\to iw_1}\left[\frac{e^{isx}}{(x-iw_0)(x-iw_1)}\right] = \left(\frac{e^{isx}}{x-iw_1}\right)\Big|_{x=iw_1} = \frac{e^{-sw_1}}{i(w_1-w_0)}$
Residuensatz
$\int_{\to\&\circlearrowleft} \frac{e^{isx}}{(x-iw_0)(x-iw_1)}\, dx = 2\pi i\Big(\mathrm{Res}_{x\to iw_0}\left[\frac{e^{isx}}{(x-iw_0)(x-iw_1)}\right] + \mathrm{Res}_{x\to iw_1}\left[\frac{e^{isx}}{(x-iw_0)(x-iw_1)}\right]\Big) = 2\pi\frac{e^{-sw_0}-e^{-sw_1}}{w_0-w_1}$
Wir erhalten $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isx}}{(x-iw_0)(x-iw_1)}\, dx = -2\pi\frac{e^{-sw_0}-e^{-sw_1}}{w_0-w_1}$
Anmerkung: Diese Aufgabe kann auch mit einer Partialbruchzerlegung gelöst werden, eine Partialbruchzerlegung ist aber nicht notwendig.

b) Greensche Funktion $G(t,t')$ mit $\mathcal{L}_t G(t,t') = \delta(t-t')$ berechnen.
Mit der Fouriertransformierten $\widetilde{G}$ der Greenschen Funktion gilt
$G(t,t') = G(t-t') = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}(\omega)\, e^{i\omega(t-t')}d\omega$
Die Gleichung $\mathcal{L}_t G(t-t') = \delta(t-t')$ im Fourierraum ergibt
$(i\omega-2)(i\omega-3)\widetilde{G}(\omega) = 1$
Umformen $(i\omega-2)(i\omega-3) = i^2(\omega+2i)(\omega+3i) = -(\omega+2i)(\omega+3i)$
$(\omega+2i)(\omega+3i)\widetilde{G}(\omega) = -1 \to \widetilde{G}(\omega) = \frac{-1}{(\omega+2i)(\omega+3i)}$
Für die inverse Fouriertransformation schreiben wir die Notation um: $t-t' \to s$ und $\omega \to x$. Wir erhalten das Integral
$(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}(x)\, e^{isx}dx = -(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isx}}{(x+2i)(x+3i)}dx$
Für $s > 0$ und $s < 0$ verwenden wir die Lösung aus (a) mit $w_0 = -2$ und $w_1 = -3$ und dem Hinweiß um das Integral zu lösen. Wir erhalten
$G(t-t') = \begin{cases} e^{2(t-t')} - e^{3(t-t')}, & t-t' < 0, \\ 0, & t-t' > 0. \end{cases}$
Bzw. $G(t-t') = H(-(t-t'))(e^{2(t-t')} - e^{3(t-t')})$.