10. Tutorium **für 14.01.2022**
(Gruppen 1-4 : Online, Gruppen 5-6 : Präsenz)

10.1 Legendre-Polynome

Die Legendresche Differentialgleichung lautet

$$(1-x^2)y_n''(x) - 2xy_n'(x) + \lambda y(x) = 0\,, \quad -1 \le x \le 1.$$

a) Verwenden Sie den Ansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und zeigen Sie, für $\lambda = k(k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0$, ergibt sich daraus ein Polynom vom Grad k als Lösung der Legendreschen Differentialgleichung. Diese Polynome werden auch Legendre-Polynome bezeichnet.
b) Sei P_k das Legendre-Polynom zum Eigenwert $\lambda = k(k+1)$ welches zusätzlich $P_k(1) = 1$ erfüllt. Geben Sie die Legendre-Polynome P_0, P_1 und P_2 an und rechnen Sie nach, dass diese Polynome orthogonal sind,

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)P_m(x)dx = 0, \quad k,m = 0,1,2, \quad k \neq m.$$

c) Transformieren Sie die Legendresche Differentialgleichung in die Sturm-Liouville'sche Gestalt $\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + \lambda\rho(x)\right)y(x) = 0$ mit $\lambda = k(k+1)$ und $\rho(x) = 1$.

10.2 Koordinatentransformation und Separationsansatz

a) Die Kugelkoordinaten sind durch $(x,y,z) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ definiert.
Bestimmen Sie als Wiederholung der 6. Übung den metrischen Tensor g^{ij}, und zeigen Sie, für die Kugelkoordinaten (r,θ,ϕ), gilt

$$\nabla^2\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\psi(\mathbf{x})\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\psi(\mathbf{x})\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2\psi(\mathbf{x})\,.$$

b) Führen Sie den Separationsansatz $\psi(\mathbf{x}) = R(r)Q(\theta)F(\phi)$ der Differentialgleichung

$$\left(-\frac{1}{2}\nabla^2 - \frac{1}{r}\right)\psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x})\,.$$

durch und schreiben Sie die Differentialgleichungen der r, θ und ϕ Koordinaten an (E ist konstant).
c) Zeigen Sie, dass mit der Koordinatentransformation $u = \cos\theta + 1$ und $P(u) = Q(\theta)$ die Differentialgleichung der θ-Koordinate in die Form

$$\partial_u\left((2u-u^2)\partial_u P(u)\right) + Z_1P(u) - \frac{Z_2}{2u-u^2}P(u) = 0$$

umgeschrieben wird (Z_1, Z_2 : Konstante).

10.3 Frobenius-Methode

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x(x-1)y'' + (\xi + 3x)y' + y = 0\,, \quad y = y(x),\ x \in \mathbb{R},$$

wobei $\xi \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.
a) Bestimmen Sie, ob die Singularitäten dieser Differentialgleichung an den Punkten $x = 0$ and $x = 1$ regulär sind.
b) Verwenden Sie den Ansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma}$ $(a_0 \neq 0)$ und bestimmen Sie die charakteristischen Exponenten σ der Differentialgleichung am Punkt $x = 0$ in Abhängigkeit von ξ.
c) Der Fall $\xi = 1/2$. Geben Sie für den Ansatz aus b) die ersten Koeffizienten a_1 und a_2 der beiden unabhängigen Lösungen am Punkt $x = 0$ an.
d) Der Fall $\xi = 0$. Geben Sie mit Hilfe der Frobenius-Methode die allgemeine Lösung am Punkt $x = 0$ an.

Ankreuzbar: 1a-c, 2a, 2bc, 3a-c, 3d

Ein kurzer Ausblick auf zukünftige Semester: In allen Fächern der Physik werden viele Phänomene von Differentialgleichungen beschrieben. Die Eigenschaften der Differentialgleichungen werden im Rahmen des Sturm-Liouville-Problems, und des Separationsansatzes analysiert und die Greensche Funktion und Frobenius-Methode sind praktische Methoden, um die Lösungen zu finden. Das Eigenwertproblem und das Spektraltheorem tauchen oft insbesondere in Quantentheorie (5. Sem) und Statistischer Physik (6. Sem) auf. Legendre-Polynome, Delta Distribution, Heaviside Funktion und andere spezielle Funktionen werden in Elektrodynamik (4. Semester) und Quantentheorie wiederkehren. Sie sind wichtige Grundlagen auch für numerische Rechnungen (wie z.B Gauß-Quadratur). Ko- und kontravariante Schreibweise werden in Elektrodynamik I & II für die spezielle Relativitätstheorie gebraucht. Die duale Basis erscheint in Form des reziproken Gitters in der Festkörperphysik (6. Sem). Die Gamma-Funktion wird in Statistischer Physik (6. Sem) eine wichtige Rolle spielen. Somit sollten die "Mathematischen Methoden" eine wichtige Grundlage für künftige theoretische Vorlesungen bieten.