10. Tutorium - Lösungen **14.01.2022**

10.1 Legendre-Polynome

a) $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ und $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.
$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n(-n(n-1) - 2n + \lambda)$
Erster Term dieser Summe: Index verschieben $\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=-2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$
die Terme mit $n = -2$ und $n = -1$ sind null, übrig bleibt $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$.
Zweiter Term: vereinfachen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n(-n(n-1) - 2n + \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n(\lambda - n(n+1))$
$\to \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n(-n(n-1) - 2n + \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left[a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_n(\lambda - n(n+1))\right]$
Für $(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0$ erhalten wir mit Koeffizientenvergleich
$a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_n(\lambda - n(n+1)) = 0 \quad \to \quad a_{n+2} = -a_n \frac{(\lambda - n(n+1))}{(n+2)(n+1)}$
Lege als Rekursionsstart a_0 und a_1 fest, wir erhalten
wähle $\lambda = k(k+1)$, mit $k = 0, 1, 2, \dots$
$k = 0, 2, 4, \dots$ gerade:
Wähle $a_0 \neq 0$ und $\lambda = k(k+1)$, wir erhalten $a_k \neq 0$ und $a_{k+2} = 0$,
aus der Rekursion ergibt sich $a_{k+2\ell} = 0$ (ungerade, $> k$) für $\ell = 1, 2, 3, \dots$. wähle $a_1 = 0$ für $a_{2\ell-1} = 0$.
$k = 1, 3, 5, \dots$ ungerade:
Wähle $a_1 \neq 0$ und $\lambda = k(k+1)$, wir erhalten $a_k \neq 0$ und $a_{k+2} = 0$,
aus der Rekursion ergibt sich $a_{k+2\ell} = 0$ (gerade, $> k$) für $\ell = 1, 2, 3, \dots$. wähle $a_0 = 0$ für $a_{2\ell} = 0$.
Zusammengefasst, das Polynom $P_k(x)$ welches sich aus $\lambda = k(k+1)$ ergibt ist vom Grad k und hat entweder nur gerade oder nur ungerade Potenzen.
b) Sei $P_k(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n^{[k]} x^n$.
$k = 0, \lambda = 0, \quad P_0(x) = a_0^{[0]}, \quad P_0(1) = 1 \to a_0^{[0]} = 1,\ P_0(x) = 1$
$k = 1, \lambda = 3, \quad P_1(x) = a_1^{[1]}x \quad P_1(1) = 1 \to a_1^{[1]} = 1,\ P_1(x) = x$
$k = 2, \lambda = 6, \quad P_2(x) = a_2^{[2]}x^2 + a_0^{[2]}, \quad$ mit Rekursion: $a_2^{[2]} = -\frac{\lambda}{2}a_0^{[2]} = -3a_0^{[2]}$
$\to P_2(x) = a_2^{[2]}x^2 + a_0^{[2]} = -3a_0^{[2]}x^2 + a_0^{[2]}$, $x = 1$: $1 = P_2(1) = -2a_0^{[2]}, \to a_0^{[2]} = -1/2 \to P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
Orthogonalität
$\int_{-1}^{1} P_0(x)P_1(x)dx = \int_{-1}^{1} x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{x=-1}^{1} = 0$
$\int_{-1}^{1} P_0(x)P_2(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(3x^2 - 1)dx = \frac{1}{2}\left(x^3 - x\right)\Big|_{x=-1}^{1} = 0$
$\int_{-1}^{1} P_1(x)P_2(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(3x^3 - x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{x=-1}^{1} = 0$
c) Umschreiben in Sturm-Liouville Form $\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + n(n+1)\rho(x)\right)y(x) = 0 \to p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x) + n(n+1)\rho(x)y(x) = 0$
Vergleich mit der Differentialgleichung in der Sturm-Liouville'schen Gestalt :
$p'(x)/p(x) = -2x/(1-x^2)$, $q(x)/p(x) = 0$ und $\rho(x)/p(x) = 1/(1-x^2)$
$\to \log(p(x)) = \log(1-x^2) \to p(x) = 1 - x^2$, $q(x) = 0$ und $\rho(x) = 1 \to \left(\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\right] + n(n+1)\right)y(x) = 0$

10.2 Koordinatentransformation und Separationsansatz

a) wie in UE 6.
Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ entspricht Jacobi matrix,
$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{g}' = \mathbf{S}^T\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$
Berechne $\mathbf{g}'^* = (g^{ij})$ mit $\mathbf{g}'^* = \mathbf{T}\mathbf{T}^T = \mathbf{g}'^{-1}$

$$\mathbf{g}'^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(r^2 \sin^2\theta) \end{pmatrix}$$

$V = \sqrt{\det \mathbf{g}'} = r^2 \sin\theta$

aus Beispiel 6.2 j), $\quad \nabla^2\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{V}\partial_i' \left(V g'^{ij} \partial_j' \psi(\mathbf{x}) \right)$

V und g'^{ij} einsetzen ergibt das gewünschte Ergebnis.

b) Ansatz: $\psi(\mathbf{x}) = R(r)Q(\theta)F(\phi)$

Differentialgleichung $(\mathcal{L}_r R)QF + r^{-2}(\mathcal{L}_\theta Q)RF + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}(\mathcal{L}_\phi F)RQ + \frac{2}{r}RQF = -2ERQF$

mit $\mathcal{L}_r = r^{-2}\partial_r(r^2\partial_r)$, $\mathcal{L}_\theta = \sin^{-1}\theta\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta)$, und $\mathcal{L}_\phi = \partial_\phi^2$.

multiplizieren mit $r^2/(RQF)$: $r^2R^{-1}\mathcal{L}_r R + Q^{-1}\mathcal{L}_\theta Q + \frac{1}{\sin^2\theta}F^{-1}\mathcal{L}_\phi F + 2r = -2Er^2$

$\to r^2R^{-1}\mathcal{L}_r R + 2r + 2Er^2 = -Q^{-1}\mathcal{L}_\theta Q - \frac{1}{\sin^2\theta}F^{-1}\mathcal{L}_\phi F$

linke Seite: Funktion von r, rechte Seite: Funktion von θ, ϕ

$\to$ Die Gleichung gilt für beliebige r, θ, ϕ nur wenn die beide Seiten konstant sind (unabhängig von r, θ, ϕ).

$r^2R^{-1}\mathcal{L}_r R + 2r + 2Er^2 = Z_1 \to \mathcal{L}_r R + (2/r)R - (Z_1/r^2)R + 2ER = 0$

$-Q^{-1}\mathcal{L}_\theta Q - \frac{1}{\sin^2\theta}F^{-1}\mathcal{L}_\phi F = Z_1$

multiplizieren mit $-\sin^2\theta \to \sin^2\theta Q^{-1}\mathcal{L}_\theta Q + Z_1 \sin^2\theta = -F^{-1}\mathcal{L}_\phi F$

Die Gleichung gilt für beliebige θ, ϕ nur wenn die beide Seiten konstant sind (unabhängig von θ, ϕ).

$\sin^2\theta Q^{-1}\mathcal{L}_\theta Q + Z_1\sin^2\theta = Z_2 \to \mathcal{L}_\theta Q + Z_1 Q - \frac{Z_2}{\sin^2\theta}Q = 0$ und $\mathcal{L}_\phi F = -Z_2 F$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r R(r)\right) + \dfrac{Z_1}{2r^2}R(r) - \dfrac{1}{r}R(r) = ER(r) \\ \dfrac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta Q(\theta)\right) + Z_1 Q(\theta) - \dfrac{Z_2}{\sin^2\theta}Q(\theta) = 0 \\ \partial_\phi^2 F = -Z_2 F \end{cases}$$

c) $u = \cos\theta + 1$, $P(u) = Q(\theta)$

$\frac{d}{d\theta} = \frac{du}{d\theta}\frac{d}{du} = -\sin\theta\frac{d}{du}$

$\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta Q(\theta)\right) + Z_1 Q(\theta) - \frac{Z_2}{\sin^2\theta}Q(\theta) = 0 \to -\partial_u\left(-\sin^2\theta\partial_u P(u)\right) + Z_1 P(u) - \frac{Z_2}{\sin^2\theta}P(u) = 0$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = (1-\cos\theta)(1+\cos\theta) = (2-u)u$

$\to \partial_u\left((2u-u^2)\partial_u P(u)\right) + Z_1 P(u) - \frac{Z_2}{2u-u^2}P(u) = 0$

10.3 Frobenius-Methode

a) $p_1(x) = \frac{\xi+3x}{x(x-1)}$ und $p_2(x) = \frac{1}{x(x-1)}$

Für den Punkt $x_0 = 0$, multipliziere mit x,

$xp_1(x) = \frac{x(\xi+3x)}{x-1}$ und $xp_2(x) = \frac{x}{x-1}$, beide Terme sind $< \infty$ für $x \to 0$.

Für den Punkt $x_0 = 1$, multipliziere mit $x-1$,

$(x-1)p_1(x) = \frac{(x-1)(\xi+3x)}{x}$ und $(x-1)p_2(x) = \frac{x-1}{x}$, beide Terme sind $< \infty$ für $x \to 1$.

Die Punkte $x = 0$ und $x = 1$ sind reguläre Singularitäten.

b) $y(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^{n+\sigma}, \qquad y'(x) = \sum_{n=0}^\infty (n+\sigma)a_n x^{n+\sigma-1} \quad$ und $\quad y''(x) = \sum_{n=0}^\infty (n+\sigma)(n+\sigma-1)a_n x^{n+\sigma-2}$.

$0 = x(x-1)y'' + (\xi+3x)y' + y = (x^2-x)y'' + (\xi+3x)y' + y$

$\sum_{n=0}^\infty (x^2-x)(n+\sigma)(n+\sigma-1)a_n x^{n+\sigma-2} + \sum_{n=0}^\infty (\xi+3x)(n+\sigma)a_n x^{n+\sigma-1} + \sum_{n=0}^\infty a_n x^{n+\sigma}$

$\to \sum_{n=0}^\infty \left(\left[(n+\sigma)(n+\sigma-1) + 3(n+\sigma) + 1\right]a_n x^{n+\sigma} + \left[\xi - (n+\sigma-1)\right](n+\sigma)a_n x^{n+\sigma-1}\right)$

betrachte den Term niedrigster Ordnung in x für $n = 0$, mit $a_0 \neq 0$ erhalten wir

$\sigma(\xi - \sigma + 1) = 0, \qquad \sigma = 0, 1+\xi$

c) Potenzen in x zusammenfassen, dazu ein Index shift

$\sum_{n=0}^\infty x^{n+\sigma}\left(\left[(n+\sigma)(n+\sigma-1) + 3(n+\sigma) + 1\right]a_n + \left[\xi - (n+\sigma)\right](n+1+\sigma)a_{n+1}\right) = 0$

$\to a_{n+1} = -\frac{(n+\sigma)(n+\sigma-1)+3(n+\sigma)+1}{(\xi-(n+\sigma))(n+1+\sigma)}a_n$

vereinfachen $(n+\sigma)(n+\sigma-1) + 3(n+\sigma) + 1 = (n+\sigma+1)(n+\sigma+1)$

$\to a_{n+1} = -\frac{(n+\sigma+1)(n+\sigma+1)}{(\xi-(n+\sigma))(n+1+\sigma)}a_n = \frac{n+\sigma+1}{n+\sigma-\xi}a_n$

$\xi = 1/2$: $\sigma = 0$,

$a_{n+1} = \frac{n+1}{n-1/2}a_n$

$a_1 = -2a_0, \quad a_2 = 4a_1 = -8a_0$

$\sigma = 1+\xi = 3/2$,

$a_{n+1} = \frac{2n+5}{2(n+1)}a_n$

$a_1 = \frac{5}{2}a_0$

$a_2 = \frac{9}{4}a_1 = \frac{45}{8}a_0$

Für die ersten Terme der allgemeine Lösung $y = ay_{[\sigma=0]} + by_{[\sigma=1+\xi]}$ erhalten wir
$y(x) = a(1 - 2x - 8x^2 + \ldots) + bx^{3/2}(1 + \frac{9}{4} + \frac{45}{8} + \ldots)$
Bemerkung: Diese Reihe konvergiert nur für x klein genug.
d) $\xi = 0$, $\sigma = 0, 1$.
Wir haben $\sigma_2 - \sigma_1 \in \mathbb{N}$, wähle $\sigma = 1$ für die erste Lösung
(starte in dem Fall $\sigma_2 - \sigma_1 \in \mathbb{N}$ mit der gröseren Wahl für σ.)
In der Rekurstionsformel für a_{n+1} in c) oben setzen wir $\sigma = 1$ und $\xi = 0$ ein, wir erhalten
$a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} a_n = \frac{n+2}{n+1} \frac{n+1}{n} a_{n-1} = \ldots = (n+2)a_0$ Teleskopsumme
Für a_n erhalten wir also $a_n = (n+1)a_0$.
die Lösung zu $\sigma = 1$ lautet $y_1(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_0 x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} n a_0 x^{n-1}$
$x \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}$ für $|x| < 1$, Ableitung der geometrischen Reihe.
Die erste Lösung lautet also
$y_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2} a_0$
Finde eine zweite Lösung.
Für $\sigma = 0$ erhalten wir $a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n$, daher $a_1 = \frac{1}{0} a_0$
Die Reihenentwicklung für diesen Fall ist nicht erfolgreich, da $\sigma = 1$ auch eine Lösung ergibt und mit dem Fall $\sigma = 0$ zusammentrifft.
Zweite Lösung ergibt sich mit Ansatz $y_2(x) = y_1(x) \int v(x)dx$, Ableitungen von y_2 ergeben:
$y_2'(x) = y_1'(x) \int v(x)dx + y_1(x)v(x), \quad y_2''(x) = y_1''(x) \int v(x)dx + 2y_1'(x)v(x) + y_1(x)v'(x)$
y_2 in Differentialgleichung einsetzen:
$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t y_2(x) &= x(x-1)y_2''(x) + 3xy_2'(x) + y_2(x) \\ &= x(x-1)\big(y_1''(x) \textstyle\int v(x)dx + 2y_1'(x)v(x) + y_1(x)v'(x)\big) + 3x\big(y_1'(x) \textstyle\int v(x)dx + y_1(x)v(x)\big) + y_1(x) \textstyle\int v(x)dx \\ &= \textstyle\int v(x)dx\, \underbrace{\big(x(x-1)y_1''(x) + 3xy_1'(x) + y_1(x)\big)}_{\mathcal{L}_t y_1 = 0} + x(x-1)2y_1'(x)v(x) + x(x-1)y_1(x)v'(x) + 3xy_1(x)v(x)\end{aligned}$$
Daher, für $\mathcal{L}_t y_2(x) = 0$ benötigen wir $x(x-1)2y_1'(x)v(x) + x(x-1)y_1(x)v'(x) + 3xy_1(x)v(x) = 0$
Formelausdrücke vereinfachen und zusammenfassen:
$\frac{2y_1'(x)}{y_1(x)} + \frac{3}{x-1} = -\frac{v'(x)}{v(x)}$
Wir haben $y_1'(x) = (1 + \frac{2x}{1-x}) \frac{1}{(1-x)^2} a_0$ und $y_1'(x)/y_1(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{1-x}$
Einsetzen ergibt
$v'(x)/v(x) = -[2(\frac{1}{x} + \frac{2}{1-x}) + \frac{3}{x-1}] = -\frac{1}{1-x} - \frac{2}{x} \rightarrow \log v(x) = -2\log(x) + \log(1-x) \rightarrow v(x) = \frac{1-x}{x^2}$
$y_2(x) = y_1(x) \int v(x)dx = \frac{x}{(1-x)^2} \big[-\frac{1}{x} - \log(x) \big] a_0 = -\frac{1 + x\log(x)}{(1-x)^2} a_0$