1. Tutorium **für 15.10.2021**
(Gruppen 1-4 : Präsenz, Gruppen 5-6 : Online)

Informationen zu den Übungen

- Die Beispiele sind online in TUWEL bis Freitag, 00:00Uhr, anzukreuzen! Eine spätere Änderung der Kreuze ist nicht mehr möglich.
- **Nur für das Online-Tutorium** : lade die ausgearbeitete Lösung auf TUWEL hoch. Der Link zum Online-Tutorium wird auf TUWEL gepostet.
- Die Anzahl der angekreuzten Beispiele geht in die Endnote ein. Mindestens 50% aller Beispiele müssen angekreuzt werden, aber je mehr, desto besser. Die Tafelleistung (oder die Online-Präsentation) wird mit „OK“ oder „nicht vorbereitet“ bewertet. In letzterem Fall werden alle Kreuze des Tages gestrichen. Zum Bestehen der Übung ist mindestens eine positive Bewertung notwendig. Sieh die Übung als gute Gelegenheit, Unklarheiten bei den Beispielen zu klären. Nütze die Gelegenheit, um Fragen zu stellen!
- In dieser Übung werden mathematische Grundlagen vermittelt, die später vor allem in „Elektrodynamik“ und „Quantentheorie“ zur Anwendung kommen, aber auch in anderen Vorlesungen und Übungen nützlich sein werden. Es zahlt sich also aus, von Anfang an eifrig mitzuarbeiten! :)

1.1 Indexschreibweise

a) Gegeben seien Matrizen $\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ und ein Vektor $\mathbf{x} = (x_i) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Berechne unter Beachtung der Einsteinschen Summenkonvention $a_{ij}b_{jk}x_k$.
b) Mit der Matrix A und dem Vektor x aus a), berechne $a_{ij}a_{kj}x_i$.
c) Berechne $a_{ij}x_i$ für $a_{ij} = ij$ und $x_i = (-1)^i i$ $(1 \leq i, j \leq 2)$.
d) Berechne $a_{ijk}x_k$ für $a_{ijk} = i + j + k$ und $x_k = k$ $(1 \leq i, j, k \leq 3)$.
e) Schreibe in Indexschreibweise $\mathbf{AB}$ und $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ (für allgemeine Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$).

1.2 Lineare Unabhängigkeit und Skalarprodukt

a) Gegeben seien Polynome

$$p_1(x) = \sqrt{\frac{3}{8}}(x+1), \quad p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{8}}(3x-1), \quad p_3(x) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2-1)\,,$$

die im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ definiert sind. Zeige, dass die Menge $\mathcal{F} = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ linear unabhängig ist.

b) Die Menge der Polynomen $\mathcal{F}$ aus a) spannt einen Vektorraum $\mathcal{V}$ auf. Die Polynome $f(x) = (3x+1)/\sqrt{2}$ und $g(x) = 3\sqrt{2}x^2$ lassen sich im Vektorraum $\mathcal{V}$ als $f(x) = f_i p_i(x)$ und $g(x) = g_i p_i(x)$ darstellen. Bestimme die Koeffizienten f_i und g_i $(i = 1, 2, 3)$.

c) Zeige, dass die Polynome $p_i(x)$ aus a) orthonormal sind, d.h.,

$$\int_{-1}^{1} p_i(x) p_j(x) dx = \delta_{ij}.$$

(Das Kronecker-Delta : $\delta_{k\ell} = 1$ wenn $k = \ell$ und 0 wenn $k \neq \ell$.)

d) Für die Polynome f und g aus b), berechne das Skalarprodukt

$$\langle f|g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx,$$

und zeige $\langle f|g \rangle = f_i g_i$.

1.3 Differentialoperator in Matrix-Vektorform

Gegeben sei ein Polynom $\psi(x) = a_i p_i(x)$ ($p_i(x)$: Polynome aus Bsp.1.2). Die erste Ableitung lässt sich im Vektorraum $\mathcal{V}$ als $\frac{d}{dx}\psi(x) = b_i p_i(x)$ darstellen. Schreibe die Transformation der Koeffizienten in Matrix-Vektorform, d.h. $\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{a}$, wobei $\mathbf{T}$ eine 3×3 Matrix ist.

Ankreuzbar: 1ab, 1c-e, 2ab, 2cd, 3