1. Tutorium - Lösungen **15.10.2021**

1.1 Indexschreibweise

Vorbemerkung: Beachte, dass hier die folgende Schreibweise verwendet wird: "$\mathbf{A} = (a_{ij})$"
Die 2×2 Matrix $\mathbf{A}$ hat vier Einträge: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.
Der Matrixeintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte lässt sich sauber so darstellen: $(\mathbf{A})_{ij} = a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{ij}$, also $(\mathbf{A})_{11} = a_{11}$, $(\mathbf{A})_{12} = a_{12}$, etc. Wenn es nur zwei freie Indizes gibt, und auch keine Gefahr der Vertauschung besteht (etwa wegen alphabetischer Reihenfolge der Indizes), wird das zuweilen verkürzt zu $\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

a)
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Lösung mit Indexschreibweise :
$a_{ij}b_{jk}x_k (= \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 a_{ij}b_{jk}x_k) = a_{ij}b_{j1}x_1 + a_{ij}b_{j2}x_2 = a_{i1}b_{11}x_1 + a_{i2}b_{21}x_1 + a_{i1}b_{12}x_2 + a_{i2}b_{22}x_2$
Wenn $i = 1$, $a_{1j}b_{jk}x_k = -16 + 4 + 2 + 1 = -9$
Wenn $i = 2$, $a_{2j}b_{jk}x_k = 16 + 12 - 2 + 3 = 29$

Lösung in Matrix-Vektorform :
$a_{ij}b_{jk}x_k = (\mathbf{ABx})_i = \left[\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_i = \begin{pmatrix} -9 \\ 29 \end{pmatrix}_i$

b) Lösung mit Indexschreibweise :
$a_{ij}a_{kj}x_i (= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij}a_{kj}x_i) = a_{11}a_{k1}x_1 + a_{12}a_{k2}x_1 + a_{21}a_{k1}x_2 + a_{22}a_{k2}x_2$
Wenn $k = 1$, $a_{ij}a_{j1}x_i = 8 + 2 + 4 - 3 = 11$
Wenn $k = 2$, $a_{ij}a_{j2}x_i = -8 + 6 - 4 - 9 = -15$

Lösung in Matrix-Vektorform :
$a_{ij}a_{kj}x_i = a_{kj}a_{ij}x_i = (\mathbf{AA}^T\mathbf{x})_k = \left[\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_k = \begin{pmatrix} 11 \\ -15 \end{pmatrix}_k$.

c) Lösung mit Indexschreibweise :
$a_{ij}x_i = \sum_{i=1}^2 a_{ij}x_i = \sum_{i=1}^2 ij(-1)^i i = -j + 4j = 3j$.

Lösung in Matrix-Vektorform :
$a_{ij}x_i = (\mathbf{A}^T\mathbf{x})_j = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]_j = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}_j$

d) Die Indexschreibweise kann auch für beliebige Zahlenfolgen a_{ijk} und x_k angewendet werden und gilt nicht nur im Zusammenhang mit Matrizen und Vektoren,
$a_{ijk}x_k = \sum_{k=1}^3 a_{ijk}x_k = \sum_{k=1}^3 (i + j + k)k = (i + j)\sum_{k=1}^3 k + \sum_{k=1}^3 k^2 = 6(i + j) + 14$.

e) $(\mathbf{AB})_{ij} = (\mathbf{A})_{ik}(\mathbf{B})_{kj} = a_{ik}b_{kj}$
$(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T)_{ji} = (\mathbf{B}^T)_{jk}(\mathbf{A}^T)_{ki} = b_{kj}a_{ik} (= a_{ik}b_{kj})$

1.2 Lineare Unabhängigkeit und Skalarprodukt

a) Lineare Unabhängigkeit : Zu zeigen ist, wenn $c_ip_i(x)$ als Polynom null ist, dann muss c_i $(i = 1, 2, 3)$ null sein.
$c_ip_i(x) = c_1\sqrt{3/8}(x + 1) + c_2/\sqrt{8}(3x - 1) + c_3\sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1)$
$= c_3 3\sqrt{5/8}x^2 + (c_1\sqrt{3/8} + c_2 3/\sqrt{8})x + c_1\sqrt{3/8} - c_2/\sqrt{8} - c_3\sqrt{5/8}$
Koeffizientenvergleich: Wenn $c_ip_i(x)$ null ist, dann müssen die folgenden Gleichungen erfüllt sein

$c_3 3\sqrt{5/8} = 0$, $c_1\sqrt{3/8} + c_2 3/\sqrt{8} = 0$ und $c_1\sqrt{3/8} - c_2/\sqrt{8} - c_3\sqrt{5/8} = 0$
Als lineares Gleichungssystem geschrieben:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3\sqrt{5/8} \\ \sqrt{3/8} & 3/\sqrt{8} & 0 \\ \sqrt{3/8} & -1/\sqrt{8} & -\sqrt{5/8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = P\mathbf{c} = 0.$$

$\det P = -(3/4)\sqrt{15/2} \neq 0 \rightarrow \mathbf{c} = P^{-1}0 = 0$. Daraus folgt, c_i ist null für $i = 1, 2, 3$ und die Polynome sind linear unabhängig.
b) $f(x) = (3x+1)/\sqrt{2} = f_i p_i(x) = f_3 3\sqrt{5/8}x^2 + (f_1\sqrt{3/8} + f_2 3/\sqrt{8})x + f_1\sqrt{3/8} - f_2/\sqrt{8} - f_3\sqrt{5/8}$
Koeffizientenvergleich: Wenn diese Polynome gleich sind, dann müssen die folgenden Gleichungen erfüllt sein
$f_3 3\sqrt{5/8} = 0$, $f_1\sqrt{3/8} + f_2 3/\sqrt{8} = 3/\sqrt{2}$, und $f_1\sqrt{3/8} - f_2/\sqrt{8} - f_3\sqrt{5/8} = 1/\sqrt{2}$
Es folgt,
$f_1 = \sqrt{3}$, $f_2 = 1$, $f_3 = 0$
Für g gilt
$g(x) = 3\sqrt{2}x^2 = g_i p_i(x) = g_3 3\sqrt{5/8}x^2 + (g_1\sqrt{3/8} + g_2 3/\sqrt{8})x + g_1\sqrt{3/8} - g_2/\sqrt{8} - g_3\sqrt{5/8}$
Koeffizientenvergleich: Wenn diese Polynome gleich sind, dann müssen die folgenden Gleichungen erfüllt sein
$g_3 3\sqrt{5/8} = 3\sqrt{2}$, $g_1\sqrt{3/8} + g_2 3/\sqrt{8} = 0$, und $g_1\sqrt{3/8} - g_2/\sqrt{8} - g_3\sqrt{5/8} = 0$
Es folgt
$g_1 = \sqrt{3}$, $g_2 = -1$, $g_3 = 4/\sqrt{5}$
c) $\int_{-1}^{1} x^n dx = 2/(n+1)$ für gerade Ganzzahlen n und $= 0$ für ungerade Ganzzahlen n.
$\int_{-1}^{1} p_1(x)p_1(x)dx = (3/8)\int_{-1}^{1}(x^2+1)dx = 1$
$\int_{-1}^{1} p_2(x)p_2(x)dx = (1/8)\int_{-1}^{1}(9x^2+1)dx = 1$
$\int_{-1}^{1} p_3(x)p_3(x)dx = (5/8)\int_{-1}^{1}(9x^4-6x^2+1)dx = 1$
$\int_{-1}^{1} p_1(x)p_2(x)dx = (\sqrt{3}/8)\int_{-1}^{1}(3x^2-1)dx = 0$
$\int_{-1}^{1} p_1(x)p_3(x)dx = (\sqrt{15}/8)\int_{-1}^{1}(3x^2-1)dx = 0$
$\int_{-1}^{1} p_2(x)p_3(x)dx = (\sqrt{5}/8)\int_{-1}^{1}(-3x^2+1)dx = 0$
d)
$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = 3\int_{-1}^{1} x^2 dx = 2$
$f_i g_i = 3 - 1 + 0 = 2$.

1.3 Differentialoperator in Matrix-Vektorform

$\psi(x) = a_3 3\sqrt{5/8}x^2 + (a_1\sqrt{3/8} + a_2 3/\sqrt{8})x + a_1\sqrt{3/8} - a_2/\sqrt{8} - a_3\sqrt{5/8}$
Erste Ableitung : $\psi'(x) = a_3 6\sqrt{5/8}x + (a_1\sqrt{3/8} + a_2 3/\sqrt{8})$
In der Dastellung mit $p_i(x)$: $\psi'(x) = b_3 3\sqrt{5/8}x^2 + (b_1\sqrt{3/8} + b_2 3/\sqrt{8})x + b_1\sqrt{3/8} - b_2/\sqrt{8} - b_3\sqrt{5/8}$
$\rightarrow b_3 3\sqrt{5/8} = 0$, $b_1\sqrt{3/8} + b_2 3/\sqrt{8} = a_3 6\sqrt{5/8}$, $b_1\sqrt{3/8} - b_2/\sqrt{8} - b_3\sqrt{5/8} = a_1\sqrt{3/8} + a_2 3/\sqrt{8}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3\sqrt{5/8} \\ \sqrt{3/8} & 3/\sqrt{8} & 0 \\ \sqrt{3/8} & -1/\sqrt{8} & -\sqrt{5/8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6\sqrt{5/8} \\ \sqrt{3/8} & 3/\sqrt{8} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 3\sqrt{3} & 2\sqrt{15} \\ -\sqrt{3} & -3 & 6\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

oder $b_3 3\sqrt{5/8} = 0$, $b_1\sqrt{3/8} + b_2 3/\sqrt{8} = a_3 6\sqrt{5/8}$, $b_1\sqrt{3/8} - b_2/\sqrt{8} - b_3\sqrt{5/8} = a_1\sqrt{3/8} + a_2 3/\sqrt{8}$
$\rightarrow b_3 = 0$, und $b_1\sqrt{3} + b_2 3 = a_3 6\sqrt{5}$, $b_1\sqrt{3} - b_2 = a_1\sqrt{3} + a_2 3$
$\rightarrow b_1 = (a_1 3\sqrt{3} + a_2 9 + a_3 6\sqrt{5})/(4\sqrt{3})$, $b_2 = (-a_1\sqrt{3} - a_2 3 + a_3 6\sqrt{5})/4$ und $b_3 = 0$

$$\rightarrow \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 3 & 3\sqrt{3} & 2\sqrt{15} \\ -\sqrt{3} & -3 & 6\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$