2. Tutorium **für 22.10.2021**
(Gruppen 1-4 : Online, Gruppen 5-8 : Präsenz)

2.1 Kronecker-Delta, Indexschreibweise

In a) sind doppelt auftretende Indizes nicht als Einsteinsche Summenkonvention zu verstehen, in b) und c) nutzen wir aber wieder die Einsteinsche Summenkonvention!
a) Skizzieren Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $a_{ij} = (j+i)\delta_{i+1j} + 2j(-1)^j\delta_{ij}$.
b) Für Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^4$ mit Einträgen $x_j = j$ und $y_i = (-1)^{i+1}$, berechnen Sie $y_i x_j \delta_{ij}$.
c) Berechnen Sie $\delta_{ii} + \delta_{ij}\delta_{ji} - \delta_{ii}\delta_{jj}$ für $1 \le i, j \le n$.
d) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $a_{ij} = (-1)^{i/2}(1+j-i)$ für i gerade und 0 sonst. Skizzieren Sie die Matrix A und berechnen Sie Spur(A).

2.2 Transformationsmatrix

Ein Vektor $\mathbf{x}$ im $\mathbb{R}^2$ lässt sich in der Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ mit Koeffizienten x_1, x_2 als $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\,\mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1\ \ \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ darstellen.
Wir wollen eine neue Basis mit Hilfe von Vektoren $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ angeben. Für eine 2×2 Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ schreiben wir

$$(\mathbf{e}'_1\ \ \mathbf{e}'_2) = (\mathbf{e}_1\ \ \mathbf{e}_2)\,\mathbf{S},$$

wobei hier $(\mathbf{e}'_1\ \ \mathbf{e}'_2)$ und $(\mathbf{e}_1\ \ \mathbf{e}_2)$ als 2×2 Matrizen verstanden werden können.
a) Zeigen Sie, falls $\det \mathbf{S} \neq 0$ dann spannt $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ auf.
b) Sei

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}, \quad \phi \in \mathbb{R}\,.$$

Zeigen Sie, dass $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ eine Orthonormalbasis bezüglich dem inneren Produkt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \mathbf{x}^\intercal\mathbf{y}$ ist.
c) Sei $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ gegeben, so dass die Gleichungen

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2, \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_2 = 2\mathbf{f}_1 + 3\mathbf{f}_2$$

erfüllt sind. Geben Sie $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ und die entsprechende Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ an
d) Bezüglich der Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ lässt sich der Vektor $\mathbf{x}$ darstellen als $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, wobei $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ die Koeffizienten bezüglich dieser Basis sind. Sei $\{\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2\}$ eine weitere Basis mit Koeffizienten x''_1, x''_2, welche $(\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\mathbf{S}$ erfüllt. Die Koeffizienten x''_1, x''_2 ergeben sich aus einer linearen Transformation von x_1, x_2, wir schreiben

$$\begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen $\mathbf{S}$ und $\mathbf{T}$ lassen sich beide als Transformationsmatrizen bezeichnen, wobei $\mathbf{S}$ die Basisvektoren umwandelt und $\mathbf{T}$ die dazugehörigen Koeffizienten.
Zeigen Sie, $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$.
e) Seien $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ und $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ zwei gegebene Orthonormalbasen. Die Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ der entsprechenden Basisvektoren sei

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Die folgende Funktion f ist bezüglich der Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ definiert,

$$f(x_1, x_2) = (2 + x_1 x_2)\exp(3x_2).$$

Geben Sie die Funktion $\widehat{f}$ an, welche $\widehat{f}(x'_1, x'_2) = f(x_1, x_2)$ für die entsprechenden Koeffizienten x'_1, x'_2 bezüglich $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ erfüllt.

2.3 Duale Basis

Ein paar Bemerkungen zur Notation. Für die Übungsaufgaben zur Dualen Basis verwenden wir bereites hoch- und tiefgestellten Indizes um kontravariante und kovariante Komponenten von Basissystemen sichtbar zu machen. Im Gegensatz zu den Übungsaufgaben zur Transformationsmatrix in 2.2 bezeichnen wir nun die Koeffizienten von einem Vektor $\mathbf{x}$ im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ bezüglich einer Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ als $x^1, x^2 \in \mathbb{R}$, ein Vektor lässt sich also darstellen als $\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2$. Der hochgestellte Index bei den Koeffizienten verdeutlicht, dass es sich bei diesen um kontravariante Komponenten handelt. Daher, eine Änderung der Basisvektoren muss wieder durch eine Änderung der Koeffizienten ausgeglichen werden. Dieser Zusammenhang macht sich auch bei den Transformationsmatrizen der Basis und Koeffizienten in Übungsbeispiel 2.2 d) bemerkbar!
Für einen Vektorraum V mit dualem Raum V^* definiere $[\![\mathbf{x}, \mathbf{y}]\!] = \mathbf{y}(\mathbf{x})$, $\mathbf{y} \in V^*, \mathbf{x} \in V$. Die duale Basis $\{\mathbf{f}_1^*, \mathbf{f}_2^*\} := \{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$ wird über $[\![\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_i^*]\!] = \delta_{ij}$, bzw. $[\![\mathbf{f}_j, \mathbf{f}^i]\!] = \delta_{ij}$ definiert.
Elemente im dualen Raum V^* lassen sich bezüglich einem inneren Produkt wieder als Elemente in V darstellen (bzw. identifizieren); für jedes $\mathbf{y} \in V^*$ gibt es ein $\mathbf{z} \in V$, so dass $[\![\mathbf{x}, \mathbf{y}]\!] = \langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle$ für alle $\mathbf{x} \in V$ (Darstellungssatz von Riesz). Für den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ kann eine duale Basis somit wieder als Basis im $\mathbb{R}^2$ verstanden werden.
a) Bestimmen Sie die duale Basis $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$ zu einer Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.
b) Sei $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ eine nicht-orthogonale Basis, definiert mit Hilfe einer Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ als $\mathbf{f}_1 = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2$. Bestimmen Sie die duale Basis $\{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$ zur nicht-orthogonalen Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ anhand der dualen Basis $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$.
c) Ein Vektor $\mathbf{x}$ wird in einer nicht-orthogonalen Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ als $\mathbf{x} = x^i\mathbf{f}_i$ und in der dualen Basis $\{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$ als $\mathbf{x} = x_i\mathbf{f}^i$ dargestellt. Zeigen Sie, $x_i = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{x}$ und

$x^i = \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{x}$ (die dot Notation bezieht sich hier 'sloppy' auf das jeweils passende innere Produkt).

d) Sei $\mathbf{x}$ ein beliebiger Vektor, der sich in einer Basis $\mathbf{f}_i$ und der entsprechenden dualen Basis $\mathbf{f}^i$ mit den Koeffizienten x^i und x_i schreiben lässt. Wie lautet die Transformation zwischen den Koordinaten x^i und x_i?

e) Zusätzlich zur Notation aus d), sei eine weitere Basis $\mathbf{f}'_i$ und der entsprechenden dualen Basis $\mathbf{f}'^i$ mit Koeffizienten x'^i und x'_i gegeben. Zeigen Sie, $x_i x^i = x'_i x'^i$.

Ankreuzbar: 1, 2a-c, 2de, 3a-c, 3de