2. Tutorium - Lösungen **22.10.2021**

2.1

a) Diese Matrix hat in der Diagonale die Einträge $-2, 4, -6, 8, \ldots$ und in der oberen Nebendiagonale die Einträge $3, 5, 7, 9, \ldots$, alle anderen Matrixeinträge sind null. Skizze:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & & & \\ & 4 & 5 & & \\ & & -6 & 7 & \\ & & & 8 & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

b) $y_i x_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} j = 1 - 2 + 3 - 4 = -2$

c) Die Einsteinsche Summenkonvention ist für jeden Term einzeln anzuwenden!

$\delta_{ii} = \sum_{i=1}^n \delta_{ii} = \sum_{i=1}^n 1 = n, \quad \delta_{ii}\delta_{jj} = n^2, \quad \delta_{ij}\delta_{ji} = \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij}\delta_{ji} = \sum_{i=1}^n 1 = n.$

$\delta_{ii} + \delta_{ij}\delta_{ji} - \delta_{ii}\delta_{jj} = n + n - n^2 = 2n - n^2$

d) Skizze:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & -3 & \cdots \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & \cdots \\ -2 & -1 & 0 & \boxed{1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Spur berechnen: Für gerade i schreibe $i = 2k$. Angenommen n gerade, $\mathrm{Spur}(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n/2} a_{2k,2k} = \sum_{k=1}^{n/2} (-1)^k$.
Für die Spur der Matrix $\mathbf{A}$ erhalten wir -1 für $n = 2, 3, 6, 7, 10, 11, \ldots$ und null sonst.

2.2

a) Die Matrix $\mathbf{E}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ lässt sich durch das Matrixprodukt $\mathbf{E}' = \mathbf{E}\mathbf{S}$ mit $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ darstellen. Wir haben $\det \mathbf{E}' = \det \mathbf{E} \det \mathbf{S} \neq 0$. Daher sind die Spalten von $\mathbf{E}'$ linear unabhängig und spannen den $\mathbb{R}^2$ auf.

Alternative Lösung

Für eine lineare unabhängie Basis, muss $(x'_1, x'_2) = (0, 0)$ sein wenn $x'_i \mathbf{e}'_i = 0$.

Mit $\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_j s_{ji}$, $x'_i \mathbf{e}'_i = x'_i \mathbf{e}_j s_{ji} = 0$.

Weil $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ linear unabhängig ist, muss die Koeffizienten null sein, d.h. $x'_i s_{ji} = 0$.

Wenn $\det \mathbf{S} \neq 0$, existiert die Inverse $\mathbf{S}^{-1}$. Deswegen $x'_i = 0$.

b) Als Orthonormalbasis (ONB) erfüllt $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ die Identitäten $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i^\intercal \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$. In Matrixform geschrieben mit $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ ergibt das $(\mathbf{E})^\intercal \mathbf{E} = \mathbf{I}$.

Für die Basis $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ gilt $(\mathbf{E}')^\intercal \mathbf{E}' = \mathbf{S}^\intercal (\mathbf{E})^\intercal \mathbf{E}\mathbf{S} = \mathbf{S}^\intercal \mathbf{S}$.

Für die Rotationsmatrix $\mathbf{S}$ gilt

$$\mathbf{S}^\intercal \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alternative Lösung in Indexschreibweise:

Als Orthonormalbasis (ONB) erfüllt $\mathbf{e}_i$ die Identität $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$.

Für die Basis $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ gilt $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \mathbf{e}_k s_{ki} \cdot \mathbf{e}_l s_{lj} = \delta_{kl} s_{ki} s_{lj} = (\mathbf{S}^\intercal \mathbf{S})_{ij}$.

Für die Rotationsmatrix $\mathbf{S}$ gilt $(\mathbf{S}^\intercal \mathbf{S})_{ij} = \delta_{ij}$ (siehe oben).

c) Wir haben $\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} \widehat{\mathbf{S}}$ mit

$$\widehat{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \widehat{\mathbf{S}}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $\mathbf{S}$ mit $(\ \mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2\ ) = (\ \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2\ )\mathbf{S}$ gilt $\mathbf{S} = \widehat{\mathbf{S}}^{-1}$. Wir erhalten $\mathbf{f}_1 = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{f}_2 = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$.
d) Darstellungen von $\mathbf{x}$ in verschiedenen Basen:
$\mathbf{x} = (\ \mathbf{e}''_1 \quad \mathbf{e}''_2\ )\begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{x} = (\ \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2\ )\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
Setze die Identität $(\ \mathbf{e}''_1 \quad \mathbf{e}''_2\ ) = (\ \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2\ )\mathbf{S}$ ein, und kombiniere die oberen Gleichungen:

$$(\ \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2\ )\mathbf{S}\begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix} = (\ \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2\ )\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Multiplizere mit $(\ \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2\ )^{-1}$ (wir haben $\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}^\intercal$ für eine Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$),

$$\mathbf{S}\begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Das ergibt $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$.

Alternative Lösung in Indexschreibweise
$\mathbf{x} = x_i\mathbf{e}_i = x''_i\mathbf{e}''_i$
Mit den Transformationen $\mathbf{e}''_i = \mathbf{e}_j s_{ji}$ und $x''_i = t_{ij}x_j$, $x_i\mathbf{e}_i = t_{ik}x_k\mathbf{e}_j s_{ji}$
Multiplizere mit $\mathbf{e}_l$: $x_i\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_l = t_{ik}x_k\mathbf{e}_j s_{ji} \cdot \mathbf{e}_l \to x_i\delta_{il} = t_{ik}x_k s_{ji}\delta_{lj} \to x_l = x_k t_{ik} s_{li}$
$\to t_{ik}s_{li} = \delta_{kl} \to \mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$.

Anmerkung : Die Basistransformation ist eine Änderung der Basis bzw. Änderung der Darstellung von einem Vektor $\mathbf{x}$. Der Vektor $\mathbf{x}$ selbst ändert sich nicht durch eine Basistransformation! (Man sagt auch, der Vektor ist invariant bezüglich der Basistransformation.) Wir erhalten nur eine andere Darstellung für $\mathbf{x}$, genauer gesagt die Darstellung von $\mathbf{x}$ bezüglich einer anderen Basis.

e) In d) haben wir $\mathbf{S} = \mathbf{T}^{-1}$ gezeigt. Daraus folgt
$\mathbf{S}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
Für $\mathbf{S} = s_{ij}$ erhalten wir $x_1 = s_{11}x'_1 + s_{12}x'_2$ und $x_2 = s_{21}x'_1 + s_{22}x'_2$.
Daraus ergibt sich $f(x_1, x_2) = (2 + (s_{11}x'_1 + s_{12}x'_2)(s_{21}x'_1 + s_{22}x'_2))\exp(3(s_{21}x'_1 + s_{22}x'_2)) = \widehat{f}(x'_1, x'_2)$.
Anmerkung: Eine Funktion g kann auch bezüglich dem Vektor selbst definiert sein, zb. $g(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ für einen gegebenen Vektor $\mathbf{y}$. Die Funktion g lässt sich auch als Funktion von Koeffizienten von $\mathbf{x}$ schreiben, wie z.b. $f(x_1, x_2)$ oben oder $g(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = y_j x_j = \widehat{g}(x_1, \ldots, x_n)$ als innere Produkt bezüglich der kartesichen Koordinaten. Wenn wir die Funktion $g(\mathbf{x})$ jetzt als Funktion der Koeffizienten schreiben, dann hängt diese Darstellung von der zugrundeliegenden Basis ab. Denke daran, dass $\mathbf{x}$ nicht von der Basis abhängt und $g(\mathbf{x})$ ja unabhängig von der Basis definiert wurde.

2.3

a) Für eine Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, wähle $\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i$, es gilt $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta^i_j$.
Ein paar Bemerkungen: Die duale Basis entspricht einer Basis aus linearen Funktionale. In diesem Sinne lässt sich die duale Basis zur Orthonormalbasis $\mathbf{e}_j$ über die Funktionale $\mathbf{e}^*_j$ definieren, als $\mathbf{e}^*_j(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{x} \rangle$ für $\mathbf{x} \in V$ und $j = 1, 2$. Mit dieser Definition erhalten wir $\mathbf{e}^*_j(\mathbf{e}_i) = \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \rangle = \delta_{ij}$, die Gleichungen für die duale Basis sind also erfüllt. Die Anwendung des Funktionals lässt sich auch schreiben als $[\![\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^*_j]\!] = \mathbf{e}^*_j(\mathbf{e}_i)$ (Lineare Funktionale).
Elemente im dualen Raum V^* lassen wieder mit Elementen in Vektorraum V identifizieren, siehe Bemerkung am Anfang von 2.3 in der Angabe. Es vereinfacht oft die Notation wenn die duale Basis wieder als Menge von Vektoren in V angegebene wird, auch in diesem Beispiel ... die duale Basis der Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ enspricht $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Wenn die Basis $\mathbf{e}_j$ aus Spaltenvektor besteht, dann wird die duale Basis $\mathbf{e}^j$ in der Regel als Basis aus Zeilenvektor geschrieben (oder umgekehrt). Formal gesehen, müssten wir also $\{\mathbf{e}_1^\intercal, \mathbf{e}_2^\intercal\}$ für die duale Basis zur Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ schreiben. In dem folgenden Berechnungen schreiben verwenden wir auch oft das innere Produkt $\langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_j \rangle$ oder $\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_j$, für ein inneres Produkt welches für Spaltenvektoren definiert ist, ist $\mathbf{e}^j$ auch als solcher zu verstehen. Für einen Zeilenvektor $\mathbf{e}^j$ und Spaltenvektor $\mathbf{e}_j$ können wir für das euklidische innere Produkt auch direkt $\mathbf{e}^j\mathbf{e}_j$ schreiben,

b) $\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S}$ mit $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ansatz für Transformation der dualen Basis: mit Hilfe einer Matrix $\mathbf{S}^*$ schreibe $\begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}^* \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix}$

(Wenn $\mathbf{f}_i$ ein Spaltenvektor ist, wird der duale Vektor $\mathbf{f}^i$ als ein Zeilenvektor geschrieben (oder umgekehrt).)
Die duale Basis ist orthonormal zur ursprünglichen Basis, $\mathbf{f}^i \mathbf{f}_j = \delta^i_j$.
Anmerkung: In dieser Schreibweise entspricht $\mathbf{f}^i$ einem Zeilenvektor $\langle \mathbf{f}^i|$ und $\mathbf{f}_j$ einem Spaltenvektor $|\mathbf{f}_j\rangle$. Wir haben also $\langle \mathbf{f}^i | \mathbf{f}_j \rangle = \delta^i_j$.

$\begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}^1\mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}^2\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}^2\mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Setze ein, und verwende die Eigenschaften der dualen Basis e^j bezüglich e_j,

$\begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}^* \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S} = \mathbf{S}^*\mathbf{S}$

Daraus folgt $\mathbf{S}^*\mathbf{S} = I$ und $\mathbf{S}^* = \mathbf{S}^{-1}$. Für $\mathbf{S}^*$ erhalten wir

$$\mathbf{S}^* = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Das ergibt $\mathbf{f}^1 = \frac{1}{3}\mathbf{e}^1$ und $\mathbf{f}^2 = -\frac{1}{3}\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^2$.
Alternativ: Verwende $\mathbf{f}_j = \mathbf{e}_i s^i{}_j$ aus der Angabe und den Ansatz $\mathbf{f}^j = s^{*j}{}_i \mathbf{e}^i$. Konstanten $s^{*j}{}_i$ lassen sich durch die Gleichungen $\mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_j = s^{*i}{}_k \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_l s^l{}_j = s^{*i}{}_k s^k{}_j = \delta^i_j$ bestimmen.
c) Beachte welche Vektoren Zeilen- und Spaltenvektoren sind:
wir haben $\mathbf{x}^\intercal = x_i \mathbf{f}^i$ und $\mathbf{x} = x^i \mathbf{f}_i$. Für den Zeilenvektor $\mathbf{f}^j$ mit $\mathbf{f}^j \mathbf{f}_i = \delta^j_i$ schreiben wir $\mathbf{f}^j \mathbf{x} = \mathbf{f}^j (x^i \mathbf{f}_i) = x^j$.
Auf ähnlich Weiße erhalten wir $\mathbf{x}^\intercal \mathbf{f}_j = (x_i \mathbf{f}^i)\mathbf{f}_j = x^j$.

d) Recall: $\mathbf{x} = x^i \mathbf{f}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$, und $\mathbf{x}^\intercal = x_i \mathbf{f}^i = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix}$.

Verschiedene Schreibweisen für $\mathbf{x}$ ergeben

$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} \right]^\intercal = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix}^\intercal \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^{1,T} & \mathbf{f}^{2,T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Mit der Orthogonalität der dualen Basis $\begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$

ergibt sich $\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}^{1,T} & \mathbf{f}^{2,T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \cdot \mathbf{f}^1 & \mathbf{f}^1 \cdot \mathbf{f}^2 \\ \mathbf{f}^2 \cdot \mathbf{f}^1 & \mathbf{f}^2 \cdot \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Alternativ : in Indexschreibweise
$\mathbf{x} = x^i \mathbf{f}_i = x_i \mathbf{f}^i \to x^j = \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}^j = x_i \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}^j$
e) Transformation der Koordinaten :

$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$ **(kontravariant)**

$\begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \mathbf{T}^* = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \mathbf{S}$ **(kovariant)**

Wiederhole $\mathbf{T}^*\mathbf{T} = (\mathbf{S}^*)^{-1}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\mathbf{S}^{-1} = I$.
Mit Hilfe dieser Identität erhalten wir

$x'_i x'^i = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \mathbf{T}^*\mathbf{T} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = x_i x^i$.

Ein weiterer Lösungsweg: Der Vektor x lässt sich darstellen als $x = x_i f^i$ und $x = x^i f_i$, daraus ergibt sich $x_i x^i = (x_i f^i) \cdot (x^j f_j) = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$
Eine analoge Darstellung gilt in der Basis f'^i und f'_i, wir erhalten die Identität,
$x_i x^i = (x_i f^i) \cdot (x^j f_j) = \langle x, x \rangle = (x'_i f'^i) \cdot (x'^j f'_j) = x'_i x'^i$.