3. Tutorium - Lösungen **29.10.2021**

3.1

a) Sei (ijk) eine Permutation von (1 2 3) (ansonsten ist $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = 0$). Wir müssen zwei mal Einträge der Permutation vertauschen, um (ijk) in (kij) umzuschreiben: $(ijk) \to (kji) \to (kij)$. Daraus folgt, (ijk) ist eine (un)gerade Permutation, genau dann wenn (kij) eine (un)gerade Permutation ist.
b)
Für $i \in \{1,2,3\}$ summiert die Einsteinsche Summenkonvention über $k, j \in \{1,2,3\} \setminus \{i\}$ und $k \neq j$ sonst gilt $\varepsilon_{ijk} = 0$. Es bleiben zwei Mögliche Permutationen welche wir als ijk und ikj bezeichnen können, von diesen Permutation ist eine gerade und eine ungerade, $\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{ijk}$.
Für gegebenes i wähle jk, so dass $\varepsilon_{ijk} = +1$. Summenkonvention ausgewertet ergibt $\varepsilon_{ijk}a_{jk} = a_{jk} - a_{kj}$. Die Matrix $\mathbf{A}$ ist hermitisch, also gilt $a_{jk} = \overline{a_{kj}}$, wobei $\overline{z}$ die komplex konjugierte von z bezeichnet. $a_{jk} - a_{kj} = \overline{a_{kj}} - a_{kj}$. Dieser Term ist imaginär, dazu betrachte $a_{kj} = a + \mathrm{ib}$, wir erhalten $\overline{a_{kj}} - a_{kj} = (a - \mathrm{ib}) - \mathrm{a} + \mathrm{ib} = -2\mathrm{ib} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.
c) $\mathbf{A} = a_{ij}$ mit $a_{ij} = -\varepsilon_{ijk}b_k$. Für $i = j$ ist $\varepsilon_{ijk} = 0$, daher sind die Diagonaleeinträge von $\mathbf{A}$ null. Asonsten, für gegebenes $i, j \in \{1,2,3\}$ mit $i \neq j$ gibt es jeweils nur eine Möglichkeit für $k = 1,2,3$ so dass $\varepsilon_{ijk} \neq 0$. Löse für jeden Matrixeintrag von $\mathbf{A}$ die Einsteinschen Summenkonvention auf,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{123}b_3 & \varepsilon_{132}b_2 \\ \varepsilon_{213}b_3 & 0 & \varepsilon_{231}b_1 \\ \varepsilon_{312}b_2 & \varepsilon_{321}b_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die gewünschte Identität ergibt sich aus der Matrix-Vektor Multiplikation $\mathbf{Ac}$. In Indexnotation geschrieben $\mathbf{Ac} = a_{ij}c_j = \varepsilon_{ijk}b_kc_j = -\varepsilon_{ikj}b_kc_j = -\mathbf{b} \times \mathbf{c}$. (Wir haben hier $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$ verwendet.)
d) $\det\mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$
$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$
$= \varepsilon_{1jk}a_{11}a_{2j}a_{3k} + \varepsilon_{2jk}a_{12}a_{2j}a_{3k} + \varepsilon_{3jk}a_{13}a_{2j}a_{3k} = \varepsilon_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k}$
Alternativ : In ähnlicher Weise $\det\mathbf{A} = \varepsilon_{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3}$
e) Für die Indizes berücksichtige $1 \leq i, j, l, m, k \leq 3$, weil sonst $\varepsilon_{ijk}, \varepsilon_{klm} = 0$ per Definition. Linke Seite mit Summenkonvention: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}$.
i) Wenn $i = j$: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = 0$. $\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = \delta_{il}\delta_{im} - \delta_{im}\delta_{il} = 0$ (ohne Summe über i)
(Wenn $l = m = i$, $\delta_{il}\delta_{im} - \delta_{im}\delta_{il} = 1 - 1 = 0$ und sonst, $\delta_{il}\delta_{im} - \delta_{im}\delta_{il} = 0 - 0 = 0$)
ii) Wenn $i \neq j$: ε_{ijk} ist nur für ein $k \in \{1,2,3\}$ ungleich null ($k \neq i$ und $k \neq j$), dementsprechend ist auch in der Summe $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}$ höchstens ein Term ungleich null.
ii-a) Wenn $l = i$ und $m = j$ (z.B. $i = l = 1$, $j = m = 2$, $k = 3$): $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 1$
$\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = \delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji} = 1$ (ohne Einsteinsche Summenkonvention)
ii-b) Wenn $l = j$ und $m = i$ (z.B. $i = m = 1$, $j = l = 2$, $k = 3$): $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = -1$
$\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = \delta_{ij}\delta_{ji} - \delta_{ii}\delta_{jj} = -1$ (ohne Einsteinsche Summenkonvention)
ii-c) Sonst ($l = m$ und/oder $\{i, j, l, m\} = \{1,2,3\}$): $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = 0$ und $\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = 0$

Alternative Lösung I: $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{abk}\delta_{ia}\delta_{jb}$ und $\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{lmk} = \varepsilon_{cdk}\delta_{lc}\delta_{md}$
$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{abk}\delta_{ia}\delta_{jb}\varepsilon_{cdk}\delta_{lc}\delta_{md} = \varepsilon_{abk}\varepsilon_{cdk}\delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{lc}\delta_{md}$
Für die Summenindizes $a, b, c, d \in \{1,2,3\}$ unterscheiden wir zwischen den folgenden Fällen:
i) $\{a, b, c, d\} = \{e\} \subset \{1,2,3\}$, daraus folgt direkt $\varepsilon_{abk} = \varepsilon_{cdk} = 0$ für $k = 1,2,3$.
ii) $\{a, b, c, d\} = \{1,2,3\}$, daraus folgt $\varepsilon_{abk}\varepsilon_{cdk} = 0$ da $k \in \{a, b, c, d\}$ für den Summenindex $k = 1,2,3$.
iii) $\{a, b, c, d\} = \{e, f\} \subset \{1,2,3\}$ ($e \neq f$) wir unterscheiden:
iiia) Falls $a = b$ oder $c = d$ gilt $\varepsilon_{abk}\varepsilon_{cdk} = 0$ für $k = 1,2,3$.
iiib) Es bleiben die Fälle $c = a \neq d = b$ bzw. $c = b \neq d = a$:
Wenn $c = a \neq d = b$, dann $\varepsilon_{abk}\varepsilon_{cdk} = \underbrace{\varepsilon_{abk}\varepsilon_{abk}}_{\text{Summe nur über } k} = 1$ und
wenn $c = b \neq d = a$, $\varepsilon_{abk}\varepsilon_{cdk} = \underbrace{\varepsilon_{abk}\varepsilon_{bak}}_{\text{Summe nur über } k} = -1$.

Unter Berücksichtigung dieser Fälle für die Summenindizes a, b, c, d in der Summe $\varepsilon_{abk}\varepsilon_{cdk}\delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{lc}\delta_{md}$, erhalten wir $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{la}\delta_{mb} - \delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{lb}\delta_{ma} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$

Alternative Lösung II: $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k \to \varepsilon_{ijk} = \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k \end{pmatrix}$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{k\ell m} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_k & \mathbf{e}_\ell & \mathbf{e}_m \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k \end{pmatrix}^T \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_k & \mathbf{e}_\ell & \mathbf{e}_m \end{pmatrix}$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_k & \mathbf{e}_\ell & \mathbf{e}_m \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{i\ell} & \delta_{im} \\ \delta_{jk} & \delta_{j\ell} & \delta_{jm} \\ \delta_{kk} & \delta_{k\ell} & \delta_{km} \end{vmatrix}$$

$$= \delta_{ik}\delta_{j\ell}\delta_{km} + \delta_{jk}\delta_{k\ell}\delta_{im} + \delta_{kk}\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{kk}\delta_{j\ell}\delta_{im} - \delta_{ik}\delta_{k\ell}\delta_{jm} - \delta_{jk}\delta_{i\ell}\delta_{km}$$

$$= \delta_{im}\delta_{j\ell} + \delta_{j\ell}\delta_{im} + 3\delta_{i\ell}\delta_{jm} - 3\delta_{j\ell}\delta_{im} - \delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{jm}\delta_{i\ell} = \delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}$$

Anmerkung (Kronecker-Delta und Levi-Civita):

Für orthonormale Basis (Rechtssysteme), $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k$,

3.2

a) Wir haben $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \frac{a}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ und $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \frac{a}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$,

Die Vektoren $\mathbf{w}^1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{w}^2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix}$, stehen jeweils orthogonal auf $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_1$. Berechne $\mathbf{w}^1\mathbf{a}_1 = a3\sqrt{3}$ und $\mathbf{w}^2\mathbf{a}_2 = -a3\sqrt{3}$.

Wir erhalten $\mathbf{b}^1 = \frac{1}{3a} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b}^2 = \frac{1}{3a} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix}$.

Alternative :

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1{}_1 & b^1{}_2 \\ b^2{}_1 & b^2{}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1{}_1 & b^1{}_2 \\ b^2{}_1 & b^2{}_2 \end{pmatrix} \frac{a}{2} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b^1{}_1 & b^1{}_2 \\ b^2{}_1 & b^2{}_2 \end{pmatrix} = \left[\frac{a}{2} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}\right]^{-1} = \frac{1}{3a} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

b) Das Volmen des Parallelepipedes : $V = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3$ oder $= (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \cdot \mathbf{a}_1 = (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1) \cdot \mathbf{a}_2$

In einer orthonormalen Basis

$V = (\mathbf{e}_i a^i{}_1 \times \mathbf{e}_j a^j{}_2) \cdot \mathbf{e}_k a^k{}_3 = \varepsilon_{ij\ell} a^i{}_1 a^j{}_2 \mathbf{e}^\ell \cdot \mathbf{e}_k a^k{}_3 = \varepsilon_{ij\ell} a^i{}_1 a^j{}_2 \delta^\ell_k a^k{}_3 = \varepsilon_{ijk} a^i{}_1 a^j{}_2 a^k{}_3$

Anmerkung : Wenn $(a^i{}_j)$ die Matrix-Darstellung des Tensors $\mathbf{A}$ in einer orthonormalen Basis, d.h. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} (a^i{}_j)$, ist das Volumen V die Determinante der Matrix $V = |\det(a^i{}_j)|$ (siehe Bsp.3.1d).

Wenn die Basisvektoren $\mathbf{e}_i$ ein Rechtssystem bilden, gilt $V > 0$ und ist das Volumen V.

Wenn $|V| > 0$, sind die Vektoren $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ linear unabhängig.

Wenn $V = 0$, sind drei Vektoren in einer zwei-dimensionalen Ebene oder in einer ein-dimensionalen Linie. $\to$ linear abhängig.

c) $\mathbf{b}^1 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}^1 \cdot \mathbf{a}_3 = 0 \to \mathbf{b}^{1T} = C\, \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$ (C : Normierungsfaktor)

Normierung des Vektors $\mathbf{b}_1$: $1 = \mathbf{b}^1 \cdot \mathbf{a}_1 = C\,(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \cdot \mathbf{a}_1 \to C = 1/((\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \cdot \mathbf{a}_1) \equiv 1/V$

$\to \mathbf{b}^1 = \frac{1}{V}(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T$

In ähnlicher Weise $\mathbf{b}^2 = \frac{1}{V}(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1)^T$ und $\mathbf{b}^3 = \frac{1}{V}(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T$

Anmerkung : $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \\ \mathbf{b}^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{V} \begin{pmatrix} (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \\ (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1)^T \\ (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \end{pmatrix}$ ist die Inverse des Tensors $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}$

Anmerkung : Das reziproke Gitter wird in der Kristallographie verwendet. In der Festkörperphysik ist das reziproke Gitter konventionell mit dem Faktor 2π definiert, d.h. $\mathbf{k}^i = 2\pi\mathbf{b}^i$. Die Vektoren $\mathbf{k}^i$ entsprechen den Wellenvektoren im k-Raum ($k = 2\pi/\lambda$ mit der Wellenlänge λ).

3.3

a) Berechne $\mathbf{w} = A\mathbf{x}$, die Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{w} = (-1, 7, 4)^\mathsf{T}$ spannen den Vektorraum V auf.

Es gibt verschiedene Methoden, um eine Orthogonalbasis zu bilden. (Es gibt auch unendliche viele Auswahlen der Basis).

1. Methode : Der Basisvektor $\mathbf{v}$ im Vektorraum $V^\mathsf{T} = \mathbb{R}^1$ ist orthogonal auf dem Vektorraum V,

$\mathbf{v} \propto \mathbf{x} \times \mathbf{w}$, z.B. $\mathbf{v} = (-5, -3, 4)$

Wir nehmen an, dass $\mathbf{e}_1 \propto \mathbf{x}+\mathbf{w} = (0,8,6)$ ein orthonormaler Basisvektor in V sei. Der zweite Basisvektor ist orthogonal auf den Vektoren $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{v}$, d.h. $\mathbf{e}_2 \propto \mathbf{e}_1 \times \mathbf{v} = (50,-30,40)$
Mit Normierung $\mathbf{e}_1 = (1/5)(0,4,3)$ und $\mathbf{e}_2 = (1/(5\sqrt{2}))(5,-3,4)$
2. Methode : Das Gram-Schmidt Verfahren. $\mathbf{y} = \mathbf{w} - (\mathbf{x}^\intercal\mathbf{w})/(\mathbf{x}^\intercal\mathbf{x})\mathbf{x}$, wir erhalten $\mathbf{y} = (2/3)(-5,7,-1)^\intercal$. Somit ist $\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}$ eine Orthogonalbasis. Falls $\mathbf{w}$ und $\mathbf{x}$ linear abhängig wären, würde beim orthogonalisieren der Fall $\mathbf{y}=0$ auftreten, und der Vektor $\mathbf{y}$ kann nicht normiert werden. Für das gegebene Beispiel erhalten wir $\mathbf{y}\neq 0$, und die Menge M spannt einen 2-dimensionalen Vektorraum auf.
Erhalte eine Orthonormalbasis durch normieren $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{y}/\|\mathbf{y}\|$, wobei $\|\mathbf{x}\|^2 = 6$ und $\|\mathbf{y}\|^2 = 100/3$.
3. Methode : Angenommen, dass $\mathbf{x}$ und $\mathbf{w}$ als eine (nicht-orthonormale) Basis sei, d.h. $\mathbf{f}_1 = \mathbf{x}$ und $\mathbf{f}_2 = \mathbf{w}$.
$\mathbf{f}_i\mathbf{f}_j = \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 14 & 66 \end{pmatrix}_{ij} = g_{ij}$ (metrischer Tensor)
Weil (g_{ij}) eine symmetrische Matrix ist, kann die Matrix wie $(g_{ij}) = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\mathbf{U}^\intercal$ mit einer orthonormalen Matrix ($\mathbf{U}\mathbf{U}^\intercal = \mathbf{1}$) zerlegt werden. Sei $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}\mathbf{U}^\intercal$. $\mathbf{e}''_i = t_i{}^j\mathbf{f}_j$ bildet eine orthonormale Basis. ($\mathbf{e}''_i\mathbf{e}''_j = t_i{}^k\mathbf{f}_k t_j{}^\ell\mathbf{f}_\ell = t_i{}^k g_{k\ell} t_j{}^\ell = (\mathbf{T}\mathbf{g}\mathbf{T}^\intercal)_{ij} = \delta_{ij}$)
Obwohl die Rechnung sehr herausfordernd ist, ergibt $\mathbf{e}''_1 = 1/(2\sqrt{822+4\sqrt{274}})(-22+\sqrt{274}), 34+\sqrt{274}, -2+2\sqrt{274})$ und $\mathbf{e}''_2 = 1/(2\sqrt{822-4\sqrt{274}})(-22-\sqrt{274}), 34-\sqrt{274}, -2-2\sqrt{274})$
(Die letzte Methode ist typischerweise für numerische Rechnungen geeignet.)
b) Für die Orthonormalprojektion auf V haben wir $\mathbf{E}_V = |\mathbf{e}_1\rangle\langle\mathbf{e}_1| + |\mathbf{e}_2\rangle\langle\mathbf{e}_2| = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^\intercal + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^\intercal$, einsetzen ergibt
$\mathbf{E}_V = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 25 & -15 & 20 \\ -15 & 41 & 12 \\ 20 & 12 & 34 \end{pmatrix}$. (Das Ergebnis ist unabhängig von Basis, z.B. $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}'_i$ oder $\mathbf{e}''_i$)
Die Projektion auf $V^\perp$ ergibt sich aus $\mathbf{E}_{V^\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{E}_V$.
Alternativ : $\mathbf{1} = |\mathbf{e}_1\rangle\langle\mathbf{e}_1| + |\mathbf{e}_2\rangle\langle\mathbf{e}_2| + |\mathbf{e}_3\rangle\langle\mathbf{e}_3|$, $\mathbf{E}_V = \mathbf{1} - |\mathbf{e}_3\rangle\langle\mathbf{e}_3| = \mathbf{1} - \frac{|\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{v}|}{\langle\mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle}$
c) Definiere eine Matrix $\mathbf{B} = 2\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{A}^2$, somit gilt $\mathbf{B}x = g(\mathbf{A})\mathbf{x}$ und definiere $\mathbf{C} = 2\mathbf{I} - \mathbf{A}$, somit gilt $\mathbf{C}x = g_1(\mathbf{A})\mathbf{x}$. Wir erhalten $\mathbf{B}\mathbf{x} = (-2,8,0)^\intercal$, $\mathbf{E}_V\mathbf{B}\mathbf{x} = (1/25)(-85,179,28)^\intercal$ und $\mathbf{C}\mathbf{x} = (3,-5,0)^\intercal$.
Anmerkung zu Anwendungen:
Die Exponentialfunktion einer Matrix $t\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (wobei $t \in \mathbb{R}$ einen Zeitschritt darstellt) angewendet an einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ lautet $\exp(t\mathbf{A})\mathbf{x}$ und ist über die Reihendarstellung der Exponentialfunktion definiert. Die Matrixexponentialfunktion ist zur Lösung einer Differentialgleichungen relevant, wobei $\mathbf{x}$ dann der Startvektor der Differentialgleichung ist. Falls $\mathbf{A}$ eine große Matrix ist, dann lässt sich $\exp(t\mathbf{A})\mathbf{x}$ aufgrund von hohem Rechenaufwand im allgemeinen nicht direkt Auswerten. Eine Abschätzung mit Hilfe der Polynomen $\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{A}^k\mathbf{x}$ lässt sich aber meistens effizient berechnen, zb $\exp(t\mathbf{A})\mathbf{x} \approx \mathbf{x} + t\mathbf{A}\mathbf{x}$ (explizites Eulerverfahren mit Zeitschritt t). Im Vektorraum $p(\mathbf{A})\mathbf{x}$, wobei p ein Polynom vom Grad k ist, lässt sich die 'beste' Abschätzung mit Hilfe einer Orthonormalbasis darstellen. Für eine Orthogonalprojektion $\mathbf{E}$ auf den entsprechenden Raum (ähnlich wie in 2.2 a-c) erhalten wir

$$\|\mathbf{E}\exp(t\mathbf{A})\mathbf{x} - \exp(t\mathbf{A})\mathbf{x}\| = \min_{\mathbf{v}\in V}\|\mathbf{v} - \exp(t\mathbf{A})\mathbf{x}\|.$$

Die zugrundeliegende Idee so einer 'Bestabschätzung' ist für Arnoldi und Lanczos Verfahren zur Abschätzung von Matrixfunktionen in der Praxis relevant (near-optimality property).
Betrachte auch Aufgabe in c), wir haben
$\|\mathbf{E}_V g(\mathbf{A})\mathbf{x} - g(\mathbf{A})\mathbf{x}\| = 1.9799$ und $\|(2\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} - g(\mathbf{A})\mathbf{x}\| = 13.9284$.
Daher, der Vektor $\mathbf{E}_V g(\mathbf{A})\mathbf{x} \in V$ liegt näher an $g(\mathbf{A})\mathbf{x} \notin V$, als die simple Abschätzung $(2\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} \in V$.

d) $|\mathbf{e}_k\rangle\langle\mathbf{e}_\ell|$ lässt sich als $\mathbf{E} = e_{ij}|\mathbf{e}_i\rangle\langle\mathbf{e}_j|$ schreiben, wobei $e_{ij} = \langle\mathbf{e}_i|\mathbf{E}|\mathbf{e}_j\rangle = \langle\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_k\rangle\langle\mathbf{e}_\ell|\mathbf{e}_j\rangle = \delta_{ik}\delta_{\ell j}$. Für die Projektion $\mathbf{P} = p_{ij}|\mathbf{e}_i\rangle\langle\mathbf{e}_j|$ erhalten wir also eine Matrix (p_{ij}) deren untere Nebendiagonale eins ist, ansonsten null. Für $\mathbf{P}^2$ verschieben sich eins Einträge in die zweite untere Nebendiagonale, etc. Z.b. Einfacher Fall für $n=3$,
$\mathbf{P} \to (p_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{P}^2 \to (p_{ik}p_{kj}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{P}^3 \to (p_{ik}p_{k\ell}p_{\ell j}) = 0$.
Für allgeimene Dimension n ergibt sich der Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsstart: (p_{ij}) ist eine Matrix mit unterer Nebendiagonale eins und null sonst, daher $p_{ij} = 1$ für $j + 1 = i$.
Induktsionsannahme: Für $1 < k < n - 1$, sei $\mathbf{\Theta} = \mathbf{P}^k$ mit Matrix (θ_{ij}). Annahme: $\theta_{ij} = 1$ für $j + k = i$ und null sonst.
Induktsionsschritt $k \to k{+}1$: $\mathbf{\Theta}' = \mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{\Theta}\mathbf{P}$ mit Matrixeinträgen $\theta'_{ij} = \theta_{il} p_{lj}$. Laut Induktionsannahme für k gilt $\theta_{ij} = 1$ für $j + k = i$ und laut Induktionsstart gilt $p_{ij} = 1$ für $j + 1 = i$. Daraus ergibt sich $\theta'_{ij} = \theta_{il} p_{lj} = 1$ für $j + k + 1 = i$ und null sonst. Daher, Induktionsannahme ist für $k + 1$ erfüllt.
Aus der vollständigen Induktion folgt nun, dass die Darstellung in der Induktsionsannahme für $k = 1, \ldots, n$ gilt, daher: die Projektion $\mathbf{P}^{n-1}$ entspricht in Matrixdarstellung (p'_{ij}) mit $p'_{n1} = 1$ und null sonst. $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{P}$ entspricht der Matrixdarstellung $(p'_{il} p_{lj})$ mit $p'_{il} p_{lj} = 0$.
e) Sei $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt $\mathbf{P}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} x_i |\mathbf{e}_j\rangle\langle \mathbf{e}_j | \mathbf{e}_i\rangle = \sum_{j=1}^{k} x_j |\mathbf{e}_j\rangle$. Setze ein,
$\langle \mathbf{P}\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \langle \sum_{j=1}^{k} x_j \mathbf{e}_j, \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i\rangle = \sum_{j=1}^{k} x_j x_j$ und $\|\mathbf{x}\|^2 = x_j x_j$.
Für den Fall $k = n$ ist $V \setminus V_k$ die leere Menge und wir müssen nur den Fall $x \in V_k$ berücksichtigen. Die gewünschte Aussage folgt aus den Darstellungen oben, bzw. weil $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ für $k = n$.
Sei $k < n$. Wir erhalten $\|\mathbf{x}\|^2 - \langle \mathbf{P}\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \sum_{j=k+1}^{n} x_j x_j$.
Für $\mathbf{x} \in V_k$ gilt $x_j = 0$ für $j = k + 1, \ldots, n$ und die Identität aus der Angabe ist erfüllt. Für $\mathbf{x} \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{V_k}$ und falls $k < n$ gilt $x_j \neq 0$ für mindestens ein $j \in \{k + 1, \ldots, n\}$, und daher, $\langle \mathbf{P}\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle < \|\mathbf{x}\|^{\mathbf{2}}$.