5. Tutorium **für 12.11.2021**

(Gruppen 1-4 : Präsenz, Gruppen 5-6 : Online)

5.1 Metrischer Tensor

Basisvektoren $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ im $\mathbb{R}^3$ lassen sich in einer orthonormalen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ als $\mathbf{f}_i = s^j{}_i \mathbf{e}_j$ darstellen, wobei

$$\mathbf{S} = (s^j{}_i) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie die Basisvektoren $\{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2, \mathbf{f}^3\}$ des dualen Raums.
b) Berechnen Sie die Elemente der metrischen Tensoren, g'_{ij} und g'^{ij} für die nicht-orthogonale Basis.
c) Berechnen Sie $g'_{ji}\mathbf{f}^j$ und überprüfen Sie, ob $\mathbf{f}_i^T = g'_{ji}\mathbf{f}^j$ gilt.
d) Zeigen Sie, dass $\sqrt{\det(\mathbf{g}')} = V$ gilt, wobei V das Volumen des von $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ gebildeten Parallelepipedes ist.

5.2 Tensoren

Ein Tensor zweiter Stufe $\mathbf{A}$ erfüllt die Eigenwertgleichung $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_{\underline{i}}\mathbf{x}_{\underline{i}}$. *(Wir notieren, dass für unterstrichene Indizes (z.B. $\underline{i}$) die Einsteinsche Summenkonvention nicht gilt.)* Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -2$ und die zugehörigen Eigenvektoren werden in einer Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ als $\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_j x^j{}_i$ $(i = 1, 2)$ dargestellt, wobei

$$\begin{pmatrix} x^1{}_1 & x^1{}_2 \\ x^2{}_1 & x^2{}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Wir nehmen an, dass der Tensor zu einem selbstadjungierten Operator entspricht.)
a) Wie lauten die kovarianten Komponenten a_{ij} und die kontravarianten Komponenten a^{ij} des Tensors $\mathbf{A}$ bezüglich der Orthonormalbasis $\mathcal{B}$?
b) Wie lauten die kovarianten Komponenten a'_{ij} des Tensors $\mathbf{A}$ bezüglich der nicht-orthogonalen Basis $\mathcal{B}' = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ wobei die Basisvektoren durch

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

definiert sind?
c) Zeigen Sie, dass die Eigenwertgleichung bezüglich der nicht-orthogonalen Basis $\mathcal{B}'$ als eine verallgemeinerte Eigenwertgleichung $a'_{ij}x'^j{}_k = \lambda_{\underline{k}} b_{ij} x'^j{}_{\underline{k}}$ dargestellt werden kann. Bestimmen Sie die Matrix (b_{ij}), wobei $\mathbf{x}_i = x'^j{}_i \mathbf{f}_j$.
d) Berechnen Sie die Basisvektoren $\mathbf{f}^i$ im dualen Raum und den zugehörigen metrischen Tensor $\mathbf{g}'^* = (g'^{ij})$.
e) Wie lauten die kontravarianten Komponenten a'^{ij} des Tensors $\mathbf{A}$ bezüglich der nicht-orthogonalen Basis $\mathcal{B}'^* = \{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$?
f) Berechnen Sie die Komponenten $a'^i{}_j$ und a'^j_i in der gemischten Darstellung zwischen der nicht-orthogonalen Basis $\mathcal{B}'$ und der dualen Basis $\mathcal{B}'^*$.
g) Zeigen Sie, dass sich die Eigenwertgleichung in der gemischten Darstellung als $a'^i{}_j x'^j{}_k = \lambda_{\underline{k}} x'^i{}_{\underline{k}}$ darstellen lässt.
h) Die Eigenvektoren $\mathbf{x}_i$ lassen sich im dualen Raum als $\mathbf{x}_i = x'_{ji}\mathbf{f}^j$ darstellen. Zeigen Sie, dass (x'_{1i}, x'_{2i}) die Linkseigenvektoren der Matrix $(a'^i{}_j)$ sind.

Ankreuzbar: 1ab, 1cd, 2a-c, 2d-f, 2gh