5. Tutorium - Lösungen **12.11.2021**

5.1 Metrischer Tensor

a) $V = \mathbf{f}_1 \cdot (\mathbf{f}_2 \times \mathbf{f}_3) = 2$
$\mathbf{f}^1 = \frac{1}{V}\mathbf{f}_2 \times \mathbf{f}_3 = \frac{1}{2}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$
$\mathbf{f}^2 = \frac{1}{V}\mathbf{f}_3 \times \mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$
$\mathbf{f}^3 = \frac{1}{V}\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$
alternativ :
$\delta^i_j = \langle \mathbf{f}^i | \mathbf{f}_j \rangle = \langle \mathbf{f}^i | s^k{}_j | \mathbf{e}_k \rangle = \langle \mathbf{f}^i \underbrace{|\mathbf{e}_\ell\rangle\langle \mathbf{e}^\ell|}_{=\mathbf{I}} s^k{}_j | \mathbf{e}_k \rangle = \langle \mathbf{f}^i | \mathbf{e}_k \rangle s^k{}_j$

$$\rightarrow \langle \mathbf{f}^i | \mathbf{e}_k \rangle = t^i{}_k \text{ mit } \mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\langle \mathbf{f}^i | = \langle \mathbf{f}^i | \mathbf{e}_j \rangle \langle \mathbf{e}^j | = t^i{}_j \langle \mathbf{e}^j |$
b) $g_{ij} = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = s^k{}_i \mathbf{e}_k \cdot s^\ell{}_j \mathbf{e}_\ell = s^k{}_i s^\ell{}_j \delta_{k\ell} = (\mathbf{S}^T\mathbf{S})_{ij}$

$$\mathbf{g}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{g}'^* = \mathbf{T}\mathbf{T}^T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -4 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

c) $g'_{ji}\mathbf{f}^j = g'_{ji} t^j{}_k \mathbf{e}^k = s^\ell{}_j \delta_{\ell m} s^m{}_i t^j{}_k \mathbf{e}^k = s^\ell{}_i \delta_{\ell m} \delta^m_k \mathbf{e}^k = s^\ell{}_i \delta_{\ell k}\mathbf{e}^k = s^\ell{}_i \mathbf{e}^T_\ell = \mathbf{f}^T_i$

$$\text{Alternativ : } \mathbf{g}'\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{S}^T$$

$g'_{ij}\mathbf{f}^j = s^k{}_i \mathbf{e}^k = s^k{}_i \mathbf{e}^T_k = \mathbf{f}^T_i$
d) $V = |(\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2) \cdot \mathbf{f}_3| = |(s^i{}_1 \mathbf{e}_i \times s^j{}_2 \mathbf{e}_j) \cdot s^k{}_3 \mathbf{e}_k| = |s^i{}_1 s^j{}_2 s^k{}_3 (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k| = |\varepsilon_{ijk} s^i{}_1 s^j{}_2 s^k{}_3| = |\det(\mathbf{S})|$
$\mathbf{g}' = \mathbf{S}^T\mathbf{S} \rightarrow \det(\mathbf{g}') = \det(\mathbf{S}^T\mathbf{S}) = \det(\mathbf{S}^T)\det(\mathbf{S}) = [\det(\mathbf{S})]^2 = V^2 \rightarrow V = \sqrt{\det(\mathbf{g}')}$
Alternative Lösung : $\sqrt{\det(\mathbf{g}')} = 4$ und $V = |(\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2) \cdot \mathbf{f}_3| = 2$.

5.2 Tensoren

a) $\langle \mathbf{x}_i | \mathbf{x}_j \rangle = \delta_{ij}$ ($\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ ist auch eine Orthonormalbasis.)
Die Summe der orthogonalen Projektoren ist eine Identität $|\mathbf{x}_1\rangle\langle \mathbf{x}_1| + |\mathbf{x}_2\rangle\langle \mathbf{x}_2| = \mathbf{I}$
$\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{A}(|\mathbf{x}_1\rangle\langle \mathbf{x}_1| + |\mathbf{x}_2\rangle\langle \mathbf{x}_2|) = \lambda_1 |\mathbf{x}_1\rangle\langle \mathbf{x}_1| + \lambda_2 |\mathbf{x}_2\rangle\langle \mathbf{x}_2|$ (Spektraltheorem)
In der Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$
$\mathbf{A} = \lambda_1 |\mathbf{x}_1\rangle\langle \mathbf{x}_1| + \lambda_2 |\mathbf{x}_2\rangle\langle \mathbf{x}_2| = 2x^i{}_1 |\mathbf{e}_i\rangle\langle \mathbf{e}_j| x^j{}_1 - 2x^i{}_2 |\mathbf{e}_i\rangle\langle \mathbf{e}_j| x^j{}_2 = 2(x^i{}_1 x^j{}_1 - x^i{}_2 x^j{}_2)|\mathbf{e}_i\rangle\langle \mathbf{e}_j|$
oder in der Basis $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$
$\mathbf{A} = 2(x_{i1} x_{j1} - x_{i2} x_{j2})|\mathbf{e}^i\rangle\langle \mathbf{e}^j|$
(Für Orthonormale Basen gilt $x_{ij} = x^i{}_j$ oder $g_{ij} = \delta_{ij}$)
$a_{ij} = \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{A} | \mathbf{e}_j \rangle = 2(x_{k1} x_{\ell 1} - x_{k2} x_{\ell 2})\langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}^k \rangle \langle \mathbf{e}^\ell | \mathbf{e}_j \rangle = 2(x_{k1} x_{\ell 1} - x_{k2} x_{\ell 2})\delta^k_i \delta^j_\ell = 2(x_{i1} x_{j1} - x_{k2} x_{\ell 2})$
$a^{ij} = \langle \mathbf{e}^i | \mathbf{A} | \mathbf{e}^j \rangle = 2(x^k{}_1 x^\ell{}_1 - x^k{}_2 x^\ell{}_2)\langle \mathbf{e}^i | \mathbf{e}_k \rangle \langle \mathbf{e}_\ell | \mathbf{e}^j \rangle = 2(x^k{}_1 x^\ell{}_1 - x^k{}_2 x^\ell{}_2)\delta^i_k \delta^j_\ell = 2(x^i{}_1 x^j{}_1 - x^k{}_2 x^\ell{}_2) = a_{ij}$

$$(a_{ij}) = \left(2(x^i{}_1 x^j{}_1 - x^i{}_2 x^j{}_2)\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Anmerkung 1 (Metrischer Tensor) : $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ und $\mathbf{g}^* = \mathbf{g}^{-1} \rightarrow g^{ij} = \delta^{ij}$
Weil der metrische Tensor eine Identität ist und $a^{ij} = g^{ik} a_{k\ell} g^{\ell j}$, gilt $a^{ij} = a_{ij}$
Anmerkung 2 (Eigenwertgleichung in Indexschreibweise) :
$\mathbf{A}|\mathbf{x}_i\rangle = \lambda_{\underline{i}} |\mathbf{x}_{\underline{i}}\rangle \rightarrow \langle \mathbf{e}_k | \mathbf{A} | \mathbf{x}_i \rangle = \langle \mathbf{e}_k | \mathbf{A} x^j{}_i | \mathbf{e}_j \rangle = \lambda_{\underline{i}} \langle \mathbf{e}_k | x^j{}_{\underline{i}} | \mathbf{e}_j \rangle \rightarrow a_{kj} x^j{}_i = \lambda_{\underline{i}} x^k{}_{\underline{i}}$ (oder $= \lambda_{\underline{i}} x_{k\underline{i}}$)
Anmerkung 3 (Für nicht-selbstadjungierte Operatoren) :
Die Eigenvektoren sind nicht orthonormal : $\langle \mathbf{x}_i | \mathbf{x}_j \rangle = g_{ij} \neq \delta_{ij}$

Mit der dualen Vektoren $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2$ wird der Tensor als $\mathbf{A} = \lambda_1 |\mathbf{x}_1\rangle\langle\mathbf{x}^1| + \lambda_2 |\mathbf{x}_2\rangle\langle\mathbf{x}^2|$ dargestellt.
Die dualen Vektoren sind die Linkseigenvektoren des Tensors $\langle\mathbf{x}^i|\mathbf{A} = \lambda_{\underline{i}}\langle\mathbf{x}^{\underline{i}}|$
b) Transformationsmatrix $\mathbf{S} : \mathbf{f}_i = s^j{}_i \mathbf{e}_j$
$a'_{ij} = \langle\mathbf{f}_i|\mathbf{A}|\mathbf{f}_j\rangle = \langle\mathbf{e}_k|s^k{}_i \mathbf{A} s^\ell{}_j|\mathbf{e}_\ell\rangle = s^k{}_i s^\ell{}_j \langle\mathbf{e}_k|\mathbf{A}|\mathbf{e}_\ell\rangle = s^k{}_i s^\ell{}_j a_{k\ell}$
(Kovariante Elemente werden mit der gleichen Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ wie die Basisvektoren transformiert.)

$$(a'_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

c) Eigenvektoren in der Basis $\mathcal{B}' : \mathbf{x}_j = x'^k{}_j \mathbf{f}_k$
$\langle\mathbf{f}_i|\mathbf{A}|\mathbf{x}_j\rangle = \lambda_{\underline{j}}\langle\mathbf{f}_i|\mathbf{x}_{\underline{j}}\rangle \to \langle\mathbf{f}_i|\mathbf{A}x'^k{}_j|\mathbf{f}_k\rangle = \lambda_{\underline{j}}\langle\mathbf{f}_i|x'^k{}_{\underline{j}}|\mathbf{f}_k\rangle \to a'_{ik}x'^k{}_j = \lambda_{\underline{j}} g'_{ik} x'^k{}_{\underline{j}} \to b_{ij} = g'_{ij}$

$$\text{Alternativ} : \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'^1{}_1 & x'^1{}_2 \\ x'^2{}_1 & x'^2{}_2 \end{pmatrix} = (t^i_j x^j_k) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(a'_{ij}x'^j{}_k) = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = (b_{ij}) \begin{pmatrix} x'^1{}_1 & x'^1{}_2 \\ x'^2{}_1 & x'^2{}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$(b_{ij}) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) Orthogonalität} : \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}'^* = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Anmerkung} : \mathbf{g}'^*\mathbf{g}' = (\mathbf{T}\mathbf{T}^T)(\mathbf{S}^T\mathbf{S}) = \mathbf{T}\underbrace{\mathbf{T}^T\mathbf{S}^T}_{=1}\mathbf{S} = \mathbf{T}\mathbf{S} = \mathbf{I}$$

(Überprüfe die Gleichung mit dem metrischen Tensor ($g_{ij} = b_{ij}$) aus (c).)

e) $a'^{ij} = \langle\mathbf{f}^i|\mathbf{A}|\mathbf{f}^j\rangle = \langle\mathbf{e}^k|t^i{}_k \mathbf{A} t^j{}_\ell|\mathbf{e}^\ell\rangle = t^i{}_k t^j{}_\ell \langle\mathbf{e}^k|\mathbf{A}|\mathbf{e}^\ell\rangle = t^i{}_k t^j{}_\ell a^{k\ell}$
(Kontravariante Elemente werden mit der Inverse $\mathbf{T}$ der Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ transformiert.)

$$(a'^{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

alternativ :

$$(a'^{ij}) = (g'^{ik}a'_{k\ell}g'^{\ell j}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

f) $a'^i{}_j = \langle\mathbf{f}^i|\mathbf{A}|\mathbf{f}_j\rangle = \langle\mathbf{e}^k|t^i{}_k \mathbf{A} s^\ell{}_j|\mathbf{e}_\ell\rangle = t^i{}_k s^\ell{}_j \langle\mathbf{e}^k|\mathbf{A}|\mathbf{e}_\ell\rangle = t^i{}_k s^\ell{}_j a^k{}_\ell$

$$(a'^i{}_j) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$a'_i{}^j = \langle\mathbf{f}_i|\mathbf{A}|\mathbf{f}^j\rangle = \langle\mathbf{e}_k|s^k{}_i \mathbf{A} t^j{}_\ell|\mathbf{e}^\ell\rangle = s^k{}_i t^j{}_\ell \langle\mathbf{e}_k|\mathbf{A}|\mathbf{e}^\ell\rangle = s^k{}_i t^j{}_\ell a_k{}^\ell$

$$(a'_i{}^j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{alternativ} : (a'^i{}_j) = (g'^{ik}a'_{kj}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$(a'_i{}^j) = (a'_{ik}g'^{kj}) = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Anmerkung : Für selbstadjungierte Operatoren ist die Matrixdarstellung des Tensors in einer Orthonormalbasis symmetrisch (oder hermitesch für komplexe Matrizen), d.h.

$$\begin{pmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1{}_1 & a^2{}_1 \\ a^1{}_2 & a^2{}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 \end{pmatrix}^T,$$

dann wird die Transposition der Matrix in einer nicht-orthonormalen Basis

$$\begin{pmatrix} a'^1{}_1 & a'^2{}_1 \\ a'^1{}_2 & a'^2{}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'^1{}_1 & a'^1{}_2 \\ a'^2{}_1 & a'^2{}_2 \end{pmatrix}^T = \left[\mathbf{T}\begin{pmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 \end{pmatrix}\mathbf{S}\right]^T = \mathbf{S}^T\begin{pmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 \\ a^21 & a^2{}_2 \end{pmatrix}^T\mathbf{T}^T$$

$$= \mathbf{S}^T\begin{pmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 \end{pmatrix}\mathbf{T}^T = \begin{pmatrix} a'_1{}^1 & a'_1{}^2 \\ a'_2{}^1 & a'_2{}^2 \end{pmatrix}.$$

Fuer nicht-selbstadjungierte Operatoren gilt in einer Orthonormalbasis $a^i{}_j \neq a^j{}_i$,

dann $\begin{pmatrix} a'^1{}_1 & a'^1{}_2 \\ a'^2{}_1 & a'^2{}_2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a'^1{}_1 & a'^2{}_1 \\ a'^1{}_2 & a'^2{}_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a'_1{}^1 & a'_1{}^2 \\ a'_2{}^1 & a'_2{}^2 \end{pmatrix}$.

In Indexschreibweise, $\begin{pmatrix} a'^1{}_1 & a'^1{}_2 \\ a'^2{}_1 & a'^2{}_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to a'^i{}_j x_i (\neq a'_j{}^i x_i)$

oder mit $\begin{pmatrix} a'^1{}_1 & a'^1{}_2 \\ a'^2{}_1 & a'^2{}_2 \end{pmatrix}^T \equiv \begin{pmatrix} b_1{}^1 & b_1{}^2 \\ b_2{}^1 & b_2{}^2 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} a'^1{}_1 & a'^1{}_2 \\ a'^2{}_1 & a'^2{}_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1{}^1 & b_1{}^2 \\ b_2{}^1 & b_2{}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to b_j{}^i x_i$ wobei $b_j{}^i = a^i{}_j$

g)

$\langle \mathbf{f}^i|\mathbf{A}|\mathbf{x}_j\rangle = \lambda_{\underline{j}}\langle \mathbf{f}^i|\mathbf{x}_{\underline{j}}\rangle \to \langle \mathbf{f}^i|\mathbf{A}x'^k{}_j|\mathbf{f}_k\rangle = \lambda_{\underline{j}}\langle \mathbf{f}^i x'^k{}_{\underline{j}}|\mathbf{f}_k\rangle \to a'^i{}_k x'^k{}_j = \lambda_{\underline{j}}\delta^i_k x'^k{}_{\underline{j}} = \lambda_{\underline{j}} x'^i{}_{\underline{j}}$

Alternative : $(a'^i{}_k x'^k{}_1) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$(a'^i{}_k x'^k{}_2) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

h) $x'_{ji} = g_{jk}x'^k{}_i$

$\begin{pmatrix} x'_{11} \\ x'_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \to (x'_{i1}a'^i{}_j) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x'_{12} \\ x'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \to (x'_{i2}a'^i{}_j) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$

alternativ : Für den selbstadjungierte Operator $\langle \mathbf{x}_i|\mathbf{A} = \lambda_{\underline{i}}\langle \mathbf{x}_{\underline{i}}|$

$\langle \mathbf{x}_i|\mathbf{A}|\mathbf{f}_j\rangle = \langle \mathbf{f}^k|x'_{ki}\mathbf{A}|\mathbf{f}_j\rangle = \lambda_{\underline{i}}\langle \mathbf{x}_{\underline{i}}|\mathbf{f}_j\rangle \to x'_{ki}a'^k{}_j = \lambda_{\underline{i}}x'_{j\underline{i}}$