6. Tutorium **für 26.11.2021**

(Gruppen 1-4 : Online, Gruppen 5-6 : Präsenz)

6.1 Lokale Transformation

Sei $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ die kartesische Basis im $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$. Wir betrachten krummliegende parabolische Koordinaten (τ, θ) im $\mathbb{R}^2$ welche durch die folgende Koordinatentransformation definiert werden,
$x^1 = x(\tau, \theta) = \tau\theta$, und $x^2 = y(\tau, \theta) = (\tau^2 - \theta^2)/2$.
a) Geben Sie die Jacobi matrix $\mathbf{J}$ und die Tangentialvektoren entlang der Koordinatenlinien $\partial\mathbf{x}/\partial\tau$ und $\partial\mathbf{x}/\partial\theta$ an. Zeigen Sie, dass die Tangentialvektoren wieder den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ aufspannen, und orthogonal aufeinander stehen.
b) Geben Sie die Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ der infinitesimalen Änderung $\mathbf{dx} = dx^i \mathbf{e}_i = dx'^i \mathbf{f}_i$ und die dazugehörige Transformationsmatrix $\mathbf{S} = s^j{}_i$ mit $\mathbf{f}_j = s^j{}_i \mathbf{e}_i$ an. Vergleichen Sie $\mathbf{f}_1$ und $\mathbf{f}_2$ mit den Tangentialvektoren $\partial\mathbf{x}/\partial\tau$ und $\partial\mathbf{x}/\partial\theta$ aus a).
c) Berechnen Sie $\mathbf{x}'^1 = \tau(x, y)$ und $\mathbf{x}'^2 = \theta(x, y)$, und geben Sie damit die Koordinaten vom Vektor $\mathbf{x} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ im parabolische Koordinatensystem an.
d) Skizzieren Sie die Koordinatenlinien $\tau = 2$ und $\theta = 3$, und $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ an dem Punkt $(\tau, \theta) = (2, 3)$.
e) Berechnen Sie g'_{ij} und g'^{ij}.

6.2 Differentialoperatoren

Betrachte eine lokale Transformation $dx^i \mathbf{e}_i = dx'^i \mathbf{f}_i$ zwischen der Standardbasis $\mathbf{e}_i$ und der ortsabhängigen Basis $\mathbf{f}_i$ krummliniger Koordinaten. Die Transformation der Basisvektoren lässt sich mit einer Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ schreiben,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \mathbf{S}\,.$$

Bezüglich der zu $\mathbf{f}_i$ dualen Basis $\mathbf{f}^i$ schreiben wir auch $dx^i \mathbf{e}_i = dx'_i \mathbf{f}^i$.
a) Geben Sie die Transformationsmatrix $\mathbf{A}$ zwischen den Differentialoperatoren $\partial_i = \partial/\partial x^i$ und $\partial'_i = \partial/\partial x'^i$ (d.h. $\partial'_i = a^j{}_i \partial_j$) und Transformationsmatrix $\mathbf{B}$ zwischen den Differentialoperatoren $\partial^i = \partial/\partial x_i$ und $\partial'^i = \partial/\partial x'_i$ (d.h. $\partial'^i = b^i{}_j \partial^j$) an. Zeigen Sie auch, es gilt $\mathbf{A} = \mathbf{S}$ und $\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}$.
b) Für den Gradienten $\nabla = \mathbf{e}^i \partial_i$ zeigen Sie $\nabla = \mathbf{f}^i \partial'_i = \mathbf{f}_i \partial'^i$. Zeigen Sie auch, für die Divergenz eines ortsabhängiges Vektorfeldes $F(\mathbf{x})$ (also $\nabla \cdot F(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^i \cdot \partial_i F(\mathbf{x})$) gilt $\nabla \cdot F(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^i \cdot \partial'_i F(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_i \cdot \partial'^i F(\mathbf{x})$.
c) Berechnen Sie $\nabla \times (\nabla x'^i)$.
d) Berechnen Sie $\nabla \times \mathbf{f}^i$.
e) Zeigen Sie $\nabla \cdot (\frac{1}{V} \mathbf{f}_i) = 0$ für $i = 1, 2, 3$ und $V = \sqrt{\det \mathbf{g}}$ für den metrischen Tensor $\mathbf{g}$.
(Hinweiß: es gilt die Identität $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$.)

f) Wir betrachten Kegelkoordinaten (γ, ψ, h) im $\mathbb{R}^3$, gegeben durch die Koordinatentransformation
$x^1 = x(\alpha, \theta, h) = \alpha h \cos\theta, \quad x^2 = y(\alpha, \theta, h) = \alpha h \sin\theta, \quad x^3 = z(\alpha, \theta, h) = h.$
Wobei $\alpha > 0$, $h \in \mathbb{R}$ und $\theta \in [0, 2\pi)$. Berechnen Sie die dazugehörige Tranformationsmatrix $\mathbf{S}$ und die Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$
g) Erstellen Sie eine Skizze des Kegels der sich aus $\alpha = 1$ ergibt. Berechnen Sie die Basisvektoren $\mathbf{f}_i$ und den Normalvektor $\mathbf{n}$ an die Kegeloberfläche an dem Punkt $(\alpha, \theta, h) = (1, \pi/6, 2)$ auf der Kegeloberfläche, und stellen Sie Ihr Ergebnis auch in der Skizze grafisch dar.
h) Berechnen Sie für die Kegelkoordinaten den metrischen Tensor $\mathbf{g}' = g'_{ij}$ und $ds = \sqrt{dx^i dx_i}$ und berechnen Sie die Länge der durch $\alpha = 1$ und $h = 3$ gegeben Kurve mit Hilfe eines Wegintegrals über die Kegelkoordinaten.
i) Berechnen Sie das Volumen des Kegels $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$ und $0 \leq h \leq 3$ mit Hilfe eines Integrals über Kegelkoordinaten.
j) *Fortsetzung von a)-e)*. Zeigen Sie, für ein ortsabhängiges Skalarfeld $\psi(\mathbf{x})$ gilt

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \partial'_i \left(V g'^{ij} \partial'_j \psi(\mathbf{x}) \right)$$

Für den Laplace-operator ∇^2 ist auch die Notation Δ oder $\nabla \cdot \nabla$ gebräuchlich.
l) Geben Sie den Laplace Operator $\nabla^2 \psi(\mathbf{x})$ in Kegelkoordinaten an.

Ankreuzbar: 1, 2ab, 2c-e, 2f-i, 2jl