6. Tutorium - Lösungen **26.11.2021**

6.1 Lokale Transformation

a) Koeffizienten in Basis $\mathbf{e}_i$:$x^1 = x(\tau,\theta)$, $x^2 = y(\tau,\theta)$,

$$J(\tau,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\tau,\theta)}{\partial \tau} & \frac{\partial x(\tau,\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y(\tau,\theta)}{\partial \tau} & \frac{\partial y(\tau,\theta)}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta & \tau \\ \tau & -\theta \end{pmatrix}$$

Für $\mathbf{x}$ haben wir $\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 = x(\tau,\theta)\mathbf{e}_1 + y(\tau,\theta)\mathbf{e}_2$

$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} = \frac{\partial x(\tau,\theta)}{\partial \tau}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial y(\tau,\theta)}{\partial \tau}\mathbf{e}_2$, $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = \frac{\partial x(\tau,\theta)}{\partial \theta}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial y(\tau,\theta)}{\partial \theta}\mathbf{e}_2$

daher $\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} J(\tau,\theta)$

Die Jacobi-Matrix erfüllt $J^T J = (\tau^2 + \theta^2)I$. Aus der Transformation oben ergibt sich das die Tangentialvektoren orthogonal aufeinander sind, daher sind sie linear unabhängig und spannen den $\mathbb{R}^2$ auf.

b) $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i$. Infinitesimale Änderung von $\mathbf{x}$: $\mathbf{x} + \mathbf{dx} = \mathbf{x} + dx^i\mathbf{e}_i = (x^i + dx^i)\mathbf{e}_i$.

Darstellung von $\mathbf{x}$ bezüglich Parametern (τ,θ): $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau_0,\theta_0) = x(\tau_0,\theta_0)\mathbf{e}_1 + y(\tau_0,\theta_0)\mathbf{e}_2$. Eine infinitesimale Änderung der Parameter (τ,θ) um $\mathbf{x}$ lässt sich mit Hilfe einer Taylor Entwicklung anschreiben:

$\mathbf{x}(\tau_0 + d\tau, \theta_0 + d\theta) = \mathbf{x}(\tau_0,\theta_0) + \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tau \\ d\theta \end{pmatrix} +$ Terme höhrer Ordnung in $d\tau$ und $d\theta$.

In einer verallgemeinerten Notation ($x^1 = x$, $x^2 = y$, $x'^1 = \tau$, $x'^2 = \theta$ und $\mathbf{f}_i$ für die Tangentialvektoren) schreiben wir

$\mathbf{x}(x'^1 + dx'^1, x'^2 + dx'^2) \approx \mathbf{x}(x'^1, x'^2) + dx'^i\mathbf{f}_i(x'^1, x'^2)$.

Die Basis $\mathbf{f}_i$ entspricht also den Richtungen der infinitesimalen Änderung bezüglich der Koeffizienten x'^i lokal um einen Punkt $\mathbf{x}$, und erfüllt die Identität $\mathbf{x} + \mathbf{dx} = \mathbf{x} + dx^i\mathbf{e}_i = \mathbf{x} + dx'^i\mathbf{f}_i$.

Kurz zusammengefasst: Lokale Basistransformation (linearisierte Basistransformation für die infinitesimalen Änderung),

$$\mathbf{x} + \mathbf{dx} = \mathbf{x} + dx^i\mathbf{e}_i = \mathbf{x} + (\tfrac{\partial}{\partial x'^j}x^i)dx'^j\mathbf{e}_i \equiv \mathbf{x} + dx'^j\mathbf{f}_j. \rightarrow \mathbf{f}_j = (\tfrac{\partial}{\partial x'^j}x^i)\mathbf{e}_i$$

Daher $\mathbf{f}_j = (\frac{\partial}{\partial x'^j}x^1)\mathbf{e}_1 + (\frac{\partial}{\partial x'^j}x^2)\mathbf{e}_2$

bzw. $\mathbf{f}_1 = (\frac{\partial}{\partial \tau}x(\tau,\theta))\mathbf{e}_1 + (\frac{\partial}{\partial \tau}y(\tau,\theta))\mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau}$ und $\mathbf{f}_2 = (\frac{\partial}{\partial \theta}x(\tau,\theta))\mathbf{e}_1 + (\frac{\partial}{\partial \theta}y(\tau,\theta))\mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}$

Wir erhalten also wieder die Tangentialvektoren entlang der Koordinatenlinien $\mathbf{f}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau}$, $\mathbf{f}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}$.

Die lokale (ortsabhängige) Transformationsmatrix entspricht der Jacobi-Matrix $\mathbf{S} = \mathbf{J}$, siehe a).

Aus a) folgt $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ sind orthogonal, aber nicht normiert ($\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2 = \tau^2 + \theta^2$).

c) $x^2 + y^2 = \tau^2\theta^2 + 1/4(\tau^4 - 2\tau^2\theta^2 + \theta^4) = 1/4(\tau^4 + 2\tau^2\theta^2 + \theta^4) = 1/4(\tau^2 + \theta^2)^2$

$\sqrt{x^2 + y^2} = \pm 1/2(\tau^2 + \theta^2) = \theta^2 + y$

$\pm\sqrt{x^2 + y^2} - y = \theta^2$, wobei $\sqrt{x^2 + y^2} - y > 0$, wähle $\theta = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - y}$. Wir erhalten $\tau = x/\theta$.

Zu jeder Lösung (τ,θ) gibt es auch die Lösung $(-\tau, -\theta)$.

Für $x = 2$, $y = -1$ erhalten wir $\tau \approx 1.11$ und $\theta \approx 1.80$.

d) Für fests $\tau = 2$:

$x(\tau,\theta) = 2\theta$, $y(\tau,\theta) = 2 - \theta^2/2$

Substituiere $\theta = x/2$ in y Gleichung,

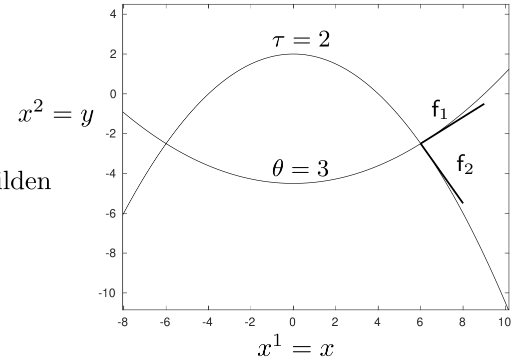
Kurve ergibt sich aus (x, y) mit $y = y(x) = 2 - x^2/8$

Für fests $\theta = 3$:

$x(\tau,\theta) = 3\tau$, $y(\tau,\theta) = \tau^2/2 - 9/2$

Substituiere $\tau = x/3$ in y Gleichung,

Kurve ergibt sich aus $y(x) = x^2/18 - 9/2$ Die Einheitszellen bilden selbst ein hexagonales Gitter.



Für $\tau = 2$, $\theta = 3$ erhalten wir $x^1 = 6$, $x^2 = -5/2$.

Jacobi Matrix am Punkt $\tau = 2$, $\theta = 3$:

$$J(\tau,\theta) = \begin{pmatrix} \theta & \tau \\ \tau & -\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Also $\mathbf{f}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{f}_2 = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$

e) Metrischer Tensor für die lokale Basis
$\mathbf{g}' = (g'_{ij})$ mit $g'_{ij} = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = (s^l{}_i \mathbf{e}_l) \cdot (s^k{}_j \mathbf{e}_k) = s^l{}_i s^k{}_j \delta_{lk} = [\mathbf{S}^T\mathbf{S}]_{ij}$
In Matrixschreibweiße, mit Transformationsmatrix $\mathbf{S}$,
$\mathbf{g}' = \mathbf{S}^T\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \theta & \tau \\ \tau & -\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta & \tau \\ \tau & -\theta \end{pmatrix} = (\tau^2 + \theta^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Die lokale Basis $\mathbf{f}_i$ hat eine duale Basis $\mathbf{f}^i$, mehr dazu in Bsp 6.2. Weil $\mathbf{f}_i$ orthogonal sind ergibt sich $\mathbf{f}^i = \mathbf{f}_i/(\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_i) = \mathbf{f}_i/(\tau^2 + \theta^2)$ (ohne Summe), und
$\mathbf{g}'^* = (g'^{ij})$ mit $g'^{ij} = \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}^j = 1/(\tau^2+\theta^2)^2 \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = 1/(\tau^2+\theta^2)\delta_{ij}$.
In Matrixschreibweiße: Duale Basis wird mit $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$ transformiert, für den metrischen Tensor $\mathbf{g}'^*$ ergibt sich $\mathbf{g}'^* = \mathbf{T}\mathbf{T}^T$ siehe auch Lösung zu 5.2 d). Aus $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$ folgt $\mathbf{g}'^* = (\mathbf{g}')^{-1}$.
$\mathbf{g}'^* = (\mathbf{g}')^{-1} = \frac{1}{\tau^2+\theta^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Bemerkung: Falls $\mathbf{f}_i$ zusätzlich normiert ist, dann wäre $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ eine orthonormal Basis und wir erhalten $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}^i$ und $g'_{ij} = g'^{ij} = \delta_{ij}$.

6.2 Differentialoperatoren

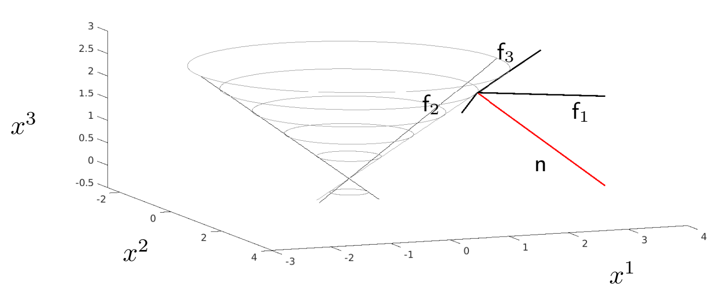
Bemerkung/Wiederholung von Bsp 6.1: Es gilt $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$, *wobei die Koeffizienten* $x^i = x^i(x'^1, x'^2, x'^3)$ *als Funktionen von neuen Koeffizienten/Parametern* (x'^1, x'^2, x'^3) *zu betrachten sind, wir können uns also auch* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x'^1, \ldots, x'^n)$ *vorstellen. Wie wirkt sich nun eine infinitesimale Änderung der Parameter* x'^1, x'^2, x'^3 *auf den Punkt* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x'^1, x'^2, x'^3)$ *aus? Für die geänderten Parameter schreiben wir* $x'^i + dx'^i$ *und für die infinitesimal Änderung im Vektor schreiben wir* $\mathbf{x} + \mathbf{dx}$. *Die infinitesimal Änderung* $\mathbf{dx}$ *lässt sich in einer lokalen Basis bezüglich Tangentialvektoren schreiben* $\mathbf{dx} = dx'^i \mathbf{f}_i$, *siehe 6.1 b). Die Basis* $\mathbf{f}_i$ *hängt vom Punkt* $\mathbf{x}$ *ab, also* $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{x})$.
a) $\mathbf{dx} = dx^i \mathbf{e}_i = \partial'_j x^i dx'^j \mathbf{e}_i \equiv dx'^j \mathbf{f}_j \to \mathbf{f}_j = s^i{}_j \mathbf{e}_i$ mit $s^i{}_j = \partial'_j x^i$
(Siehe auch 6.1 ab), $\mathbf{S}$ entspricht der Jacobi-Matrix am Punkt $\mathbf{x}$.)
$\mathbf{S} = \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} \end{pmatrix}$.
Die Ableitung ∂'_i: *ein Punkt* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x'^1, \ldots, x'^n)$ *hängt von den Parametern* x'^j *ab und die Ableitung* ∂'_i *ist die partielle Ableitung nach dem jeweiligen Paramter. Wir erhalten* $\partial'_i \mathbf{x} = \mathbf{f}_i$.
Ableitungen transformieren
$\partial'_i = \frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = (\partial'_i x^j)\partial_j = s^j{}_i \partial_j \equiv a^j{}_i \partial_j \to \mathbf{A} = \mathbf{S}$ (d.h. ∂'_i ist eine kovariante Komponente)
Die zu $\mathbf{f}_i$ duale Basis ergibt sich aus $\mathbf{f}^j = t^j{}_i \mathbf{e}^i$ mit $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{T} = (t^j{}_i)$. Wir können jetzt $\mathbf{dx}$ bezüglich der dualen Basis darstellen $\mathbf{dx} = dx_i \mathbf{e}^i = dx'_j \mathbf{f}^j$. Lokal um einen Punkt $\mathbf{x}$ können wir nach den dualen Koeffizienten ableiten $\partial'^j = \frac{\partial}{\partial x'_j}$. Diese Ableitung erfüllt $\partial'^i \mathbf{x} = \mathbf{f}^i$. Wir erhalten
$\mathbf{dx} = dx_i \mathbf{e}^i = (\partial'^j x_i) dx'_j \mathbf{e}^i = dx'_j \mathbf{f}^j \to \mathbf{f}^j = t^j{}_i \mathbf{e}^i$ mit $t^j{}_i = (\partial'^j x_i) = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j}$
$\partial'^i = (\partial'^i x_j)\partial^j = t^i{}_j \partial^j \equiv b^i{}_j \partial^j \to \mathbf{B} = \mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$ (d.h. ∂'^i ist eine kontravariante Komponente)
b) Orthogonalität der dualen Basis : $\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}^j = \delta_i^j \to \mathbf{f}^i = (\mathbf{S}^{-1})^i{}_j \mathbf{e}^j \equiv t^i{}_j \mathbf{e}^j$ $(\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1})$
$\to \mathbf{f}^i \partial'_i = (t^i{}_k \mathbf{e}^k)(s^j{}_i \partial_j) = (\mathbf{S}\mathbf{T})^j{}_k \mathbf{e}^k \partial_j = \delta^j_k \mathbf{e}^k \partial_j = \mathbf{e}^j \partial_j (= \mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y + \mathbf{e}_z \partial_z) = \nabla$
$\mathbf{f}_i \partial'^i = (\mathbf{e}_k s^k{}_i)(t^i{}_j \partial^j) = (\mathbf{S}\mathbf{T})^k{}_j \mathbf{e}_k \partial^j = \delta^k_j \mathbf{e}_k \partial^j = \mathbf{e}_j \partial^j$
Analog für Divergenz
$\mathbf{f}^i \cdot \partial'_i \mathbf{F} = (t^i{}_k \mathbf{e}^k) \cdot (s^j{}_i \partial_j)\mathbf{F} = (\mathbf{S}\mathbf{T})^j{}_k \mathbf{e}^k \cdot \partial_j \mathbf{F} = \delta^j_k \mathbf{e}^k \cdot \partial_j \mathbf{F} = \mathbf{e}^j \cdot \partial_j \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$
$\mathbf{f}_i \cdot \partial'^i \mathbf{F} = (\mathbf{e}_k s^k{}_i) \cdot (t^i{}_j \partial^j)\mathbf{F} = (\mathbf{S}\mathbf{T})^k{}_j \mathbf{e}_k \cdot \partial^j \mathbf{F} = \delta^k_j \mathbf{e}_k \cdot \partial^j \mathbf{F} = \mathbf{e}_j \cdot \partial^j \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$

Eine Bemerkung zu den folgenden Beispiele: Die ortsabhängige Basis $\mathbf{f}_j$ *und die Differentialoperatoren kommutieren nicht (zb.* $\partial'_i \mathbf{f}_j \neq \mathbf{f}_j \partial'_i$ *im allgemeinen, das wird auch aus der Darstellung von* $\mathbf{f}_j$ *bezüglich der parabolischen Koordinaten in Bsp 6.1 und weiter unten bezüglich der Kegelkoordinaten klar.) Wir können uns* $\mathbf{f}_j = \mathbf{f}_j(\mathbf{x})$ *vorstellen, bzw.* $s^j{}_i = s^j{}_i(\mathbf{x})$, $\mathbf{f}^j = \mathbf{f}^j(\mathbf{x})$, $t^j{}_i = t^j{}_i(\mathbf{x})$, $g^{ij} = g^{ij}(\mathbf{x})$ *etc.*
c) Im Kreuzprodukt mit einer orthogonalen ortsunabhängigen Basis behandeln wir die Differentialoperatoren wie lineare Faktoren, $\nabla \times (\nabla x'^i) = (\mathbf{e}^k \partial_k) \times (\mathbf{e}^l \partial_l x'^i) = (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_l)\partial_k \partial_l x'^i = \mathbf{e}_j \varepsilon_{jkl} \partial_k \partial_l x'^i$.
$\nabla \times (\nabla x'^i) \to \underbrace{\varepsilon_{jkl}}_{\text{asymmetrisch}} \underbrace{\partial_k \partial_l}_{\text{symmetrisch}} x'^i = 0$

Erklärung zu Summe über asymmetrischen $\cdot$ symmetrischen Terme: Diagonalterme $l = k$ sind null weil $\varepsilon_{jll} = 0$ (asymmetrisch). Überlegung für Summenterme mit $l \neq k$, für jeden Summenterm mit Index l, k kommt in der Summe auch ein Summenterm mit Index k, l vor, und weil $\varepsilon_{jkl} = -\varepsilon_{jlk}$ (asymmetrisch) und $\partial_k \partial_l = \partial_l \partial_k$ (symmetrisch) löschen sich diese Terme aus. Analog lässt sich dieses Ergebnis auch für ein Skalarfeld $\psi(\mathbf{x})$ statt x'^i zeigen.
Anmerkung : Die Rechnung in der ortsabhängigen nicht-orthonormalen Basis ist viel aufwendiger:
$\nabla \times (\nabla x'^i) = (\mathbf{f}^k \partial'_k) \times (\mathbf{f}^l \partial'_l x'^i) = (\mathbf{f}^k \partial'_k \times \mathbf{f}^l)\partial'_l x'^i + (\mathbf{f}_k \times \mathbf{f}_l)\partial'_k \partial'_l x'^i$.
Der 1.Term, $\mathbf{f}^k \partial'_k \times \mathbf{f}^l = \nabla \times \mathbf{f}^l$, muss ohne dem Ergebnis von (d) gerechnent werden.
Zusätzlich gilt $\mathbf{f}_k \times \mathbf{f}_l = V \varepsilon_{jk\ell} \mathbf{f}^j$ im 2.Term
Überlegen Sie immer, welche Basis optimal für die Rechnung ist.

d) In b) haben wir gezeigt $\nabla = \mathbf{f}^j \partial'_j$, daraus folgt $\nabla x'^i = \mathbf{f}^j \partial'_j x'^i = \mathbf{f}^i$ und wir erhalten $\nabla \times \mathbf{f}^i = \nabla \times (\nabla x'^i)$.
Aus c) folgt $\nabla \times (\nabla x'^i) = 0$ und daher gilt $\nabla \times \mathbf{f}^i = 0$.

e) Die folgenden Identitäten haben wir bereits in der Lösung von Bsp 5.1 gesehen:
$V = \mathbf{f}_1 \cdot (\mathbf{f}_2 \times \mathbf{f}_3) = \sqrt{\det(\mathbf{g})} \to \mathbf{f}^1 = \frac{1}{V}\, \mathbf{f}_2 \times \mathbf{f}_3$ und $\mathbf{f}_1 = V\, \mathbf{f}^2 \times \mathbf{f}^3$
In der Angabe einsetzen:
$\nabla \cdot (\frac{1}{V}\mathbf{f}_1) = \nabla \cdot (\mathbf{f}^2 \times \mathbf{f}^3) = (\underbrace{\nabla \times \mathbf{f}^2}_{=0,\,\text{Bsp. d)}}) \cdot \mathbf{f}^3 - \mathbf{f}^2 \cdot (\underbrace{\nabla \times \mathbf{f}^3}_{=0,\,\text{Bsp. d)}}) = 0$
Analog für $\nabla \cdot (\frac{1}{V}\mathbf{f}_2) = 0$ und $\nabla \cdot (\frac{1}{V}\mathbf{f}_3) = 0$.
f) $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \alpha} & \frac{\partial x^1}{\partial \theta} & \frac{\partial x^1}{\partial h} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \alpha} & \frac{\partial x^2}{\partial \theta} & \frac{\partial x^2}{\partial h} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \alpha} & \frac{\partial x^3}{\partial \theta} & \frac{\partial x^3}{\partial h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h\cos\theta & -\alpha h \sin\theta & \alpha\cos\theta \\ h\sin\theta & \alpha h\cos\theta & \alpha\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
die Matrixinverse $\mathbf{S}^{-1}$ wird fürs Beispiel nicht verlangt, wir haben aber
$\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} h^{-1}\cos\theta & h^{-1}\sin\theta & -\alpha h^{-1} \\ -\alpha^{-1}h^{-1}\sin\theta & \alpha^{-1}h^{-1}\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Für die Basis $\mathbf{f}_i$ ergibt sich
$\mathbf{f}_1 = h(\cos\theta \mathbf{e}_1 + \sin\theta \mathbf{e}_2)$,
$\mathbf{f}_2 = \alpha h(-\sin\theta \mathbf{e}_1 + \cos\theta \mathbf{e}_2)$,
$\mathbf{f}_3 = \alpha\cos\theta \mathbf{e}_1 + \alpha\sin\theta \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.
g) Wir haben $\alpha = 1$, $\theta = \pi/6$, $h = 2$.
Winkelfunktionen $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $\sin(\pi/6) = 1/2$.
In kartesichen Koordinaten $x^1 = \sqrt{3}$, $x^2 = 1$, $x^3 = 2$.
$\mathbf{f}_\alpha = \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_\theta = \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_h = \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$
und für den Normalvektor erhalten wir $\mathbf{n} = \mathbf{f}_2 \times \mathbf{f}_3$.
Wähle positives Vorzeichen für den Normalvektor der nach außen zeigt (Orientierung vom Normalvektor).
$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \alpha h\cos\theta \\ \alpha h\sin\theta \\ -\alpha^2 h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$



($\|\mathbf{n}\| = \alpha h\sqrt{1+\alpha^2}$ ergibt infinitsemale Änderung der Oberfläche dA.)

h) $\mathbf{g}'$ berechnen, ähnlich wie in 6.1 e). In Matrixschreibweiße:

$$\mathbf{g}' = \mathbf{S}^T\mathbf{S} = \begin{pmatrix} h\cos\theta & h\sin\theta & 0 \\ -\alpha h\sin\theta & \alpha h\cos\theta & 0 \\ \alpha\cos\theta & \alpha\sin\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h\cos\theta & -\alpha h\sin\theta & \alpha\cos\theta \\ h\sin\theta & \alpha h\cos\theta & \alpha\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 & 0 & \alpha h \\ 0 & \alpha^2 h^2 & 0 \\ \alpha h & 0 & \alpha^2+1 \end{pmatrix}.$$

Infinitesimale Änderung des Weges $ds = \|dx\| = \sqrt{dx \cdot dx}$, duale Darstellung $dx = dx_i \mathbf{f}^i$ und nicht-duale Darstellung $dx = dx^i \mathbf{f}_i$ kombinieren um das Innere Produkt aufzulösen.
Das ergibt $dx \cdot dx = dx_i dx^i$. Umschreiben $dx_i = \mathbf{f}_i \cdot dx = \mathbf{f}_i \cdot (dx'^j \mathbf{f}_j)$ und mithilfe der Metrik $dx_i = dx'^j g_{ij}$.
Einsetzen $ds = \sqrt{dx \cdot dx} = dx'^i dx'^j g_{ij} = \left(h^2 dx'^1 dx'^1 + \alpha^2 h^2 dx'^2 dx'^2 + (\alpha^2+1) dx'^3 dx'^3 + 2\alpha h dx'^1 dx'^3\right)^{1/2}$.
Wir wollen die Länge des Weges $C_1 = \{(\alpha,\theta,h) | \alpha = 1, h = 3, 0 \le \theta < 2\pi\}$ berechnen.
$\int_{C_1} ds = \int_{C_1} \left(dx'^i dx'^j g_{ij} = h^2 dx'^1 dx'^1 + \alpha^2 h^2 dx'^2 dx'^2 + (\alpha^2+1) dx'^3 dx'^3 + 2\alpha h dx'^1 dx'^3\right)^{1/2}$
α und h sind auf dem Weg C_1 konstant ($\alpha = 1$, $h = 3$) und deswegen fällt $dx'^1 = d\alpha$ und $dx'^3 = dh$ weg, es bleibt $dx'^2 = d\theta$:
$\int_{C_1} ds = \int_0^{2\pi} \left(\alpha^2 h^2 d\theta^2\right)^{1/2} = \int_0^{2\pi} \alpha h d\theta = 2\pi\alpha h = 6\pi.$
Das stimmt überein mit dem Umfang des Kreises mit Radius $\alpha h = 3$.
i) $dV = |\det S|$ Determinante von 3×3 Matrix berechnen, wir erhalten
$dV = |\det S| = \alpha h^2 d\alpha d\theta dh$.
Sei $C_2 = \{(\alpha,\theta,h) | 0 \le \alpha \le, 0 \le h \le 3, 0 \le \theta < 2\pi\}$.
Volumen des Kegels ergibt sich aus dem Integral
$\int_{C_2} dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^3 |\det J|\, dh\, d\theta\, d\alpha = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^3 \alpha h^2\, dh\, d\theta\, d\alpha = 2\pi(\alpha^2/2)|_{\alpha=0}^1 (h^3/3)|_{h=0}^3 = 9\pi.$
Nachrechnen mit Formel für Volumen von Kegel mit Höhe h und Radius r, Volumen ist $V = \pi/3 r^2 h$. Der gegebene Kegel hat Radius $r = \alpha h = 3$, also $V = 9\pi$.
j) $\nabla \cdot (\nabla\psi(\mathbf{x})) = \mathbf{f}^i \cdot \partial_i' \left(\mathbf{f}_j \partial'^j \psi(\mathbf{x})\right)$
$= \mathbf{f}^i \cdot \partial_i' \left((V\partial'^j\psi(\mathbf{x}))(V^{-1}\mathbf{f}_j)\right) = \mathbf{f}^i \cdot (V^{-1}\mathbf{f}_j)\partial_i'(V\partial'^j\psi(\mathbf{x})) + (V\partial'^j\psi(\mathbf{x}))\mathbf{f}^i \cdot \partial_i'(V^{-1}\mathbf{f}_j)$
wir haben $\mathbf{f}^i \cdot \partial_i'(V^{-1}\mathbf{f}_j) = \nabla \cdot (V^{-1}\mathbf{f}_j) = 0$ siehe e),
$\nabla \cdot (\nabla\psi(\mathbf{x})) = \mathbf{f}^i \cdot (V^{-1}\mathbf{f}_j)\partial_i'(V\partial'^j\psi(\mathbf{x})) = V^{-1}\delta^i_j \partial_i'(V\partial'^j\psi(\mathbf{x})) = V^{-1}\partial_i'(V\partial'^i\psi(\mathbf{x}))$
Für die Transformation der Ableitung $\partial'^i \to \partial_i'$ erhalten wir die gleiche Transformationen wie für $\mathbf{f}^i \to \mathbf{f}_i$:
Ableitung umschreiben mit Hilfe von a), $\partial'^i = t^i{}_j \partial^j = t^i{}_j \partial_j$ mit $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$, $\mathbf{T} = (t^j{}_i)$.
Aus $\partial_i' = s^j{}_i \partial_j$ ergibt sich $t^i{}_k \partial_i' = t^i{}_k s^j{}_i \partial_j = \delta_{kj}\partial_j$, also $\partial_j = t^l{}_j \partial_l'$.
Zusammen $\partial'^i = t^i{}_j \partial_j = t^i{}_j t^l{}_j \partial_l' = [\mathbf{T}\mathbf{T}^T]_{il}\partial_l' = g'^{il}\partial_l'$
In $\nabla \cdot (\nabla\psi(\mathbf{x})) = V^{-1}\partial_i'(V\partial'^i\psi(\mathbf{x}))$ oben $\partial'^i = g'^{ij}\partial_j'$ einsetzen führt zum gewünschten Ergebnis.
l) Wir haben $\det \mathbf{g}' = h^4\alpha^2(\alpha^2+1) - \alpha^4 h^4 = \alpha^2 h^4$, also $V = \sqrt{\det \mathbf{g}'} = \alpha h^2$.
Berechne $\mathbf{g}'^* = (g^{ij})$: Mit $T = S^{-1}$ gilt $\mathbf{g}'^* = \mathbf{T}\mathbf{T}^T = \mathbf{g}'^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha^2+1)h^{-2} & 0 & -\alpha h^{-1} \\ 0 & \alpha^{-2}h^{-2} & 0 \\ -\alpha h^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verwende Formel aus j), wir werten die einzelnen Terme $\partial_i' V g_{ij}' \partial_j'$, für $i, j = 1, 2, 3$ aus:

$$\begin{array}{lll} & V = \alpha h^2 & \\ i=1, j=1, & g'^{11} = (\alpha^2+1)h^{-2}: & \partial_\alpha(\alpha^3+\alpha^1)\partial_\alpha = (3\alpha^2+1)\partial_\alpha + (\alpha^3+\alpha^1)\partial_\alpha\partial_\alpha \\ i=2, j=2, & g'^{22} = \alpha^{-2}h^{-2}: & \alpha^{-1}\partial_\theta\partial_\theta \\ i=3, j=3, & g'^{33} = 1: & \partial_h \alpha h^2 \partial_h = 2\alpha h\partial_h + \alpha h^2 \partial_h\partial_h \\ i=1, j=3, & g'^{13} = -\alpha h^{-1}: & -\partial_\alpha \alpha^2 h \partial_h = -2\alpha h\partial_h - \alpha^2 h \partial_\alpha\partial_h \\ i=3, j=1, & g'^{31} = -\alpha h^{-1}: & -\partial_h \alpha^2 h \partial_\alpha = -\alpha^2\partial_\alpha - \alpha^2 h \partial_h\partial_\alpha \end{array}$$

sonstige Summenterme fallen weg weil $g'^{ij} = 0$
Aufsummieren ergibt
$(\alpha^3+\alpha^1)\partial_\alpha\partial_\alpha + \alpha^{-1}\partial_\theta\partial_\theta + \alpha h^2\partial_h\partial_h + (3\alpha^2+1)\partial_\alpha + 2\alpha h\partial_h - 2\alpha h\partial_h - \alpha^2\partial_\alpha - 2\alpha^2 h\partial_h\partial_\alpha$
$= (\alpha^3+\alpha^1)\partial_\alpha\partial_\alpha + \alpha^{-1}\partial_\theta\partial_\theta + \alpha h^2\partial_h\partial_h + (2\alpha^2+1)\partial_\alpha - 2\alpha^2 h\partial_h\partial_\alpha$
Mit $V^{-1} = \alpha^{-1}h^{-2}$ multiplizieren ergibt
$\nabla^2 = (\alpha^2+1)h^{-2}\partial_\alpha\partial_\alpha + \alpha^{-2}h^{-2}\partial_\theta\partial_\theta + \partial_h\partial_h + (2\alpha+\alpha^{-1})h^{-2}\partial_\alpha - 2\alpha h^{-1}\partial_h\partial_\alpha$