

7. Tutorium

für 3.12.2021

(Gruppen 1-8 : Online)

7.1 Delta-Distribution und Heaviside-Funktion

Berechnen Sie die folgenden Integrale für die Delta-Distribution $\delta(x)$ und die Heaviside-Funktion $H(x)$.

a) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy (2x^2 + 2xy + y^2) \delta(x + 2y - 1) \delta(2x + y)$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{x^2} \delta(x^2 - 9)$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy H(x)H(y)H(1 - x - y)$

7.2 n -dimensionale Kugel

Das Volumen der n -dimensionalen Kugel mit Radius R ($R > 0$) ist durch

$$V_n(R) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n H\left(R^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2\right)$$

gegeben. ($H(R)$: Heaviside-Funktion)

a) Zeigen Sie,

$$V_n(R) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 H(R^2 - x_1^2 - x_2^2) V_{n-2}\left(\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}\right).$$

b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Polarkoordinaten (r, θ) wobei die Transformation durch $(x_1, x_2) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ gegeben ist. Schreiben Sie das Integral aus (a) mit den Polarkoordinaten um.

c) Berechnen Sie das Volumen der 4-dimensionalen Kugel.

d) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \int_{-\infty}^{\infty} dx_4 \delta\left(R - \sqrt{\sum_{i=1}^4 x_i^2}\right)$$

e) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \int_{-\infty}^{\infty} dx_4 \delta\left(R^2 - \sum_{i=1}^4 x_i^2\right)$$

7.3 Heaviside-Funktion und Cauchyscher Hauptwert

Zeigen Sie, dass die folgenden Integrale zur Heaviside-Funktion konvergieren.

a)

$$H_+(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{t - i\varepsilon} dt$$

b)

$$H_-(x) = 1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{t - i\varepsilon} dt$$

c)

$$H_p(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{t} dt$$

(\mathcal{P} : Cauchyscher Hauptwert)

Ankreuzbar: 1a-c, 2a-c, 2de, 3ab, 3c