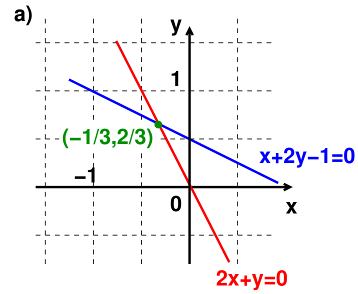
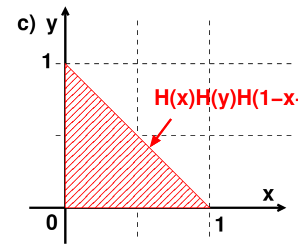
7. Tutorium - Lösungen **3.12.2021**

7.1 Delta-Distribution und Heaviside-Funktion





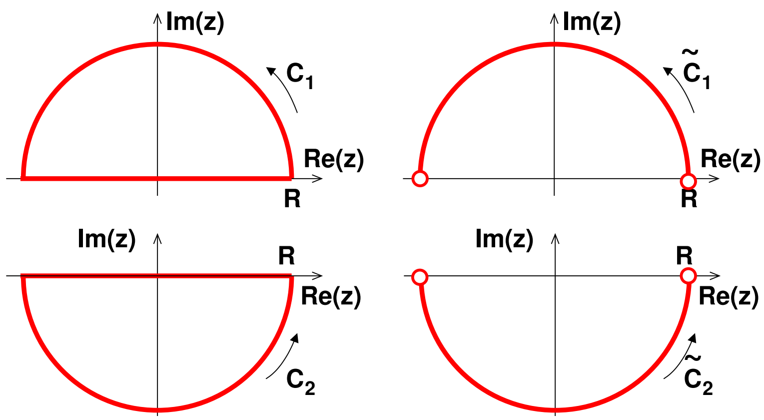
a) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy (2x^2+2xy+y^2)\delta(x+2y-1)\delta(2x+y)$
$= \int_{-\infty}^{\infty} dx (2x^2+2x(-2x)+(-2x)^2)\delta(x-4x-1)$
$= \int_{-\infty}^{\infty} dx 2x^2 \delta(-3x-1) = \frac{2}{27}$
b) $t = x^2-9$, $dt/dx = 2x$,
Wenn $-\infty < x < 0$, $\infty > t > -9$ und $dt/dx = 2x = -2\sqrt{t+9}$
Wenn $0 < x < \infty$, $-9 < t < \infty$ und $dt/dx = 2x = 2\sqrt{t+9}$
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2}\delta(x^2-9)dx = -\int_{\infty}^{-9} e^{t+9}\delta(t)\frac{1}{2\sqrt{t+9}}dt + \int_{-9}^{\infty} e^{t+9}\delta(t)\frac{1}{2\sqrt{t+9}}dt$
$= 2\int_{-9}^{\infty} e^{t+9}\delta(t)\frac{1}{2\sqrt{t+9}}dt = \frac{1}{3}e^9$
alternativ : $\delta(x^2-9) = \frac{1}{2|x|}(\delta(x-3)+\delta(x+3))$
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2}\delta(x^2-9)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2}\frac{1}{2|x|}(\delta(x-3)+\delta(x+3))dx = \frac{1}{3}e^9$
c) $H(y)H(1-x-y) = 1$ wenn $0 < y < 1-x$ $(1-x>0)$, sonst 0.
$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy H(x)H(y)H(1-x-y) = \int_{-\infty}^{1} dx \int_{0}^{1-x} dy H(x)$
$= \int_{-\infty}^{1} dx (1-x)H(x) = \int_0^1 dx(1-x) = \frac{1}{2}$

7.2 n-dimensionale Kugel

a) Volumen der n-dimensionalen Kugel : $V_n(R) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} H\left(R^2-\sum_{i=1}^n x_i^2\right)dx_1dx_2\cdots dx_n$
In $(n-2)$-Dimensionen $V_{n-2}(\sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2}) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} H\left((R^2-x_1^2-x_2^2)-\sum_{i=3}^n x_i^2\right)dx_3dx_4\cdots dx_n$
$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(R^2-x_1^2-x_2^2)V_{n-2}(\sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2})dx_1dx_2$
$= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} H(R^2-x_1^2-x_2^2)H\left((R^2-x_1^2-x_2^2)-\sum_{i=3}^n x_i^2\right)dx_1dx_2\cdots dx_n$
$= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} H(R^2-x_1^2-x_2^2)H\left(R^2-\sum_{i=1}^n x_i^2\right)dx_1dx_2\cdots dx_n$
Wenn $R^2-\sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$, gilt auch $R^2-x_1^2-x_2^2 > \sum_{i=3}^n x_i^2 > 0$.
D.h., $H(R^2-x_1^2-x_2^2)H\left(R^2-\sum_{i=1}^n x_i^2\right) = H\left(R^2-\sum_{i=1}^n x_i^2\right)$
$V_n(R) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(\sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2})V_{n-2}(\sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2})dx_2dx_1$
b) Jacobi-Matrix der Polarkoordinaten $(x_1,x_2) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$
Volumenelement (Flächenelement): $dx_1dx_2 = |\det J|drd\theta = r$
$V_n(R) = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} H(\sqrt{R^2-r^2})V_{n-2}(\sqrt{R^2-r^2})rdrd\theta = 2\pi\int_0^R V_{n-2}(\sqrt{R^2-r^2})rdr$
Anmerkung : Wenn wir annehmen, dass $V_n(R) = R^nV_n(1)$, gilt $V_n(R) = 2\pi V_{n-2}(1)\int_0^R (R^2-r^2)^{n/2-1}rdr$.
Mit der Koordinatentransformation : $x = R^2-r^2$
$V_n(R) = \pi V_{n-2}(1)\int_0^{R^2} x^{n/2-1}dx = \frac{2}{n}\pi V_{n-2}(1)R^n = \frac{2}{n}\pi R^2 V_{n-2}(R)$
c) $V_4(R) = 2\pi\int_0^R V_2(\sqrt{R^2-r^2})rdr$
Mit dem Volumen der 2-dimensionalen Kugel (Fläche des Kreises) : $V_2(R) = \pi R^2$
$V_4(R) = 2\pi\int_0^R \pi(R^2-r^2)rdr = 2\pi^2(\frac{1}{2}R^4-\frac{1}{4}R^4) = \frac{1}{2}\pi^2R^4$
d) Die Delta-Distribution ist eine Ableitung der Heaviside-Funktion : $\delta(R) = \frac{d}{dR}H(R)$
$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(R-\sqrt{\sum_{i=1}^4 x_i^2}\right)dx_1dx_2dx_3dx_4 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dR}H\left(R-\sqrt{\sum_{i=1}^4 x_i^2}\right)dx_1dx_2dx_3dx_4$
$= \frac{d}{dR}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H\left(R-\sqrt{\sum_{i=1}^4 x_i^2}\right)dx_1dx_2dx_3dx_4 = \frac{d}{dR}\frac{1}{2}\pi^2R^4 = 2\pi^2R^3$
Anmerkung :

$H\left(R-\sqrt{\sum_{i=1}^4 x_i^2}\right)=1$ wenn $R>\sqrt{\sum_{i=1}^4 x_i^2}$, sonst 0.
$H\left(R^2-\sum_{i=1}^4 x_i^2\right)=1$ wenn $R>\sqrt{\sum_{i=1}^4 x_i^2}$ oder $R<-\sqrt{\sum_{i=1}^4 x_i^2}$, sonst 0.
Wenn wir nur den Bereich $R>0$ betrachten, sind die beiden Heaviside-Funktionen gleich
$H\left(R-\sqrt{\sum_{i=1}^4 x_i^2}\right)=H\left(R^2-\sum_{i=1}^4 x_i^2\right)$ wenn $R>0$.
e) $\frac{d}{dR}H(R^2)=2R\delta(R^2)\to\delta(R^2)=\frac{1}{2R}\frac{d}{dR}H(R^2)$
oder mit $E=R^2$, $\delta(R^2)=\delta(E)=\frac{d}{dE}H(E)$ (wobei $\frac{d}{dE}=\frac{dR}{dE}\frac{d}{dR}=\frac{1}{2R}\frac{d}{dR}$)
$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(E-\sum_{i=1}^4 x_i^2\right)dx_1dx_2dx_3dx_4=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dE}H\left(E-\sum_{i=1}^4 x_i^2\right)dx_1dx_2dx_3dx_4$
$=\frac{d}{dE}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H\left(E-\sum_{i=1}^4 x_i^2\right)dx_1dx_2dx_3dx_4=\frac{d}{dE}\frac{1}{2}\pi^2E^2=\pi^2R^2$
Anmerkung : Wir nehmen an, dass die Dimension der Variable R Länge L ist,
Die Dimension der Heavisidefunktion $H(R)\sim 1\to\int dx_1dx_2dx_3dx_4H(R-\sqrt{\sum_i x_i^2})\sim L^4$
Die Dimension der Heavisidefunktion $H(R^2)\sim 1\to\int dx_1dx_2dx_3dx_4H(R^2-\sum_i x_i^2)\sim L^4$
Die Dimension der Delta-Distribution $\delta(R)\sim 1/L\to\int dx_1dx_2dx_3dx_4\delta(R-\sqrt{\sum_i x_i^2})\sim L^3$
Die Dimension der Delta-Distribution $\delta(R^2)\sim 1/L^2\to\int dx_1dx_2dx_3dx_4\delta(R^2-\sum_i x_i^2)\sim L^2$

7.3 Heaviside-Funktion und Cauchyscher Hauptwert



oberer Halbkreis :
$\tilde{C}_1=\{z=Re^{i\theta}|0<\theta<\pi\}$,
geschlossener oberer Halbkreis :
$C_1=\tilde{C}_1+\{z=x|-R<x<R\}$
unterer Halbkreis :
$\tilde{C}_2=\{z=Re^{i\theta}|\pi<\theta<2\pi\}$,
geschlossener unterer Halbkreis :
$C_2=\tilde{C}_2+\{z=x|R>x>-R\}$

a)
Zwei Möglichkeiten für die Rechnung des Integrals :
$H_+(x)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixt}}{t-i\varepsilon}dt=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to0^+}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ixt}}{t-i\varepsilon}dt$
$=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to0^+}\lim_{R\to\infty}\left(\oint_{C_1}\frac{e^{ixz}}{z-i\varepsilon}dz-\int_{\tilde{C}_1}\frac{e^{ixz}}{z-i\varepsilon}dz\right)$
oder
$=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to0^+}\lim_{R\to\infty}\left(-\oint_{C_2}\frac{e^{ixz}}{z-i\varepsilon}dz+\int_{\tilde{C}_2}\frac{e^{ixz}}{z-i\varepsilon}dz\right)$
Konturintegral entlang der geschlossenen Halbkreise (Residuensatz)
$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{e^{ixz}}{z-i\varepsilon}dz=e^{-\varepsilon x}$ und $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{e^{ixz}}{z-i\varepsilon}dz=0$ wenn $R>|\varepsilon|$
Konturintegral entlang der offenen Halbkreise
$\left|\int_{\tilde{C}_1}\frac{e^{ixz}}{z-i\varepsilon}dz\right|=\left|\int_0^{\pi}\frac{e^{ixRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}-i\varepsilon}iRe^{i\theta}d\theta\right|\le\int_0^{\pi}\left|\frac{e^{ixRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}-i\varepsilon}iRe^{i\theta}\right|d\theta=\int_0^{\pi}|e^{-xR\sin\theta}|\left|\frac{R}{Re^{i\theta}-i\varepsilon}\right|d\theta$
Da $\sin\theta>0$ auf $\tilde{C}_1$ (d.h. $0<\theta<\pi$), gilt $|e^{-xR\sin\theta}|\overset{R\to\infty}{\longrightarrow}0$ für $x>0$, bzw. $\left|\frac{Re^{-xR\sin\theta}}{Re^{i\theta}-i\varepsilon}\right|\overset{R\to\infty}{\longrightarrow}0$.
Im Limes $R\to\infty$, $\int_{\tilde{C}_1}\frac{e^{ixz}}{z-i\varepsilon}dz\to0$ wenn $x>0$
In ähnlicher Weise gilt im Limes $R\to\infty$, $\int_{\tilde{C}_2}\frac{e^{ixz}}{z-i\varepsilon}dz\to0$ wenn $x<0$
Anmerkung : $\lim_{R\to\infty}\int_{\tilde{C}_1}\frac{e^{ixz}}{z-i\varepsilon}dz\neq0$ wenn $x<0$ und $\lim_{R\to\infty}\int_{\tilde{C}_2}\frac{e^{ixz}}{z-i\varepsilon}dz\neq0$ wenn $x>0$.
Wenn $x>0$ ist es leichter, das Integral mit $H_+(x)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to0^+}\lim_{R\to\infty}\left(\oint_{C_1}\frac{e^{ixz}}{z-i\varepsilon}dz-\int_{\tilde{C}_1}\frac{e^{ixz}}{z-i\varepsilon}dz\right)$ zu rechnen. Das Ergebnis ist $H_+(x)=\lim_{\varepsilon\to0^+}e^{-\varepsilon x}=1$
Wenn $x<0$ ist es leichter, das Integral mit $H_+(x)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to0^+}\lim_{R\to\infty}\left(-\oint_{C_2}\frac{e^{ixz}}{z-i\varepsilon}dz+\int_{\tilde{C}_2}\frac{e^{ixz}}{z-i\varepsilon}dz\right)$ zu rechnen. Das Ergebnis ist $H_+(x)=0$

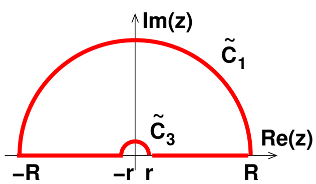
b) ähnlich wie (a)

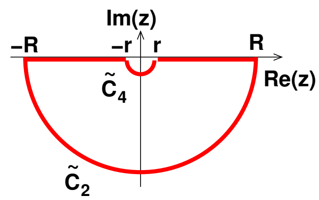
Wenn $x > 0$, $H_-(x) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon\to 0^-} \lim_{R\to\infty} \oint_{C_1} \frac{e^{ixz}}{z-i\varepsilon} dz$

Da der Pol $z = i\varepsilon$ $(\varepsilon < 0)$ außerhalb des Kreises C_1 ist, $H_-(x) = 1$

und wenn $x < 0$ $H_-(x) = 1 - \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon\to 0^-} \lim_{R\to\infty} \oint_{C_2} \frac{e^{ixz}}{z-i\varepsilon} dz = 1 - \lim_{\varepsilon\to 0^-} e^{-x\varepsilon} = 0$

c)





oberer Halbkreise :
$\tilde{C}_1 = \{z = Re^{i\theta} | 0 < \theta < \pi\}$
und $\tilde{C}_3 = \{z = re^{i\theta} | 0 < \theta < \pi\}$
geschlossene Kontur :
$C_o = \tilde{C}_1 - \tilde{C}_3 + \{z = x | -R < x < -r\}$
$+\{z = x | r < x < R\}$
unterer Halbkreise :
$\tilde{C}_2 = \{z = Re^{i\theta} | \pi < \theta < 2\pi\}$
und $\tilde{C}_4 = \{z = re^{i\theta} | \pi < \theta < 2\pi\}$
geschlossene Kontur :
$C_u = -\tilde{C}_2 + \tilde{C}_4 + \{z = x | -R < x <$
$-r\}$
$+\{z = x | r < x < R\}$

Der Hauptwert $\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{t} dt = \lim_{r\to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-r} \frac{e^{ixt}}{t} dt + \int_r^{\infty} \frac{e^{ixt}}{t} dt \right)$ wird als

$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{t} dt = \lim_{r\to 0^+} \lim_{R\to\infty} \left(\oint_{C_o} \frac{e^{ixz}}{z} dz - \int_{\tilde{C}_1} \frac{e^{ixz}}{z} dz + \int_{\tilde{C}_3} \frac{e^{ixz}}{z} dz \right)$

oder $\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{t} dt = \lim_{r\to 0^+} \lim_{R\to\infty} \left(\oint_{C_u} \frac{e^{ixz}}{z} dz + \int_{\tilde{C}_2} \frac{e^{ixz}}{z} dz - \int_{\tilde{C}_4} \frac{e^{ixz}}{z} dz \right)$

gerechnet.

Konturintegral entlang der geschlossenen Kurven (Residuensatz) : $\oint_{C_o} \frac{e^{ixz}}{z} dz = \oint_{C_u} \frac{e^{ixz}}{z} dz = 0$

Konturintegral entlang der offenen Halbkreise mit Radius R :

$\int_{\tilde{C}_1} \frac{e^{ixz}}{z} dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{ixRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta = \int_0^{\pi} ie^{ixR\cos\theta} e^{-xR\sin\theta} d\theta$

Da $\sin\theta > 0$, gilt $\lim_{R\to\infty} \int_{\tilde{C}_1} \frac{e^{ixz}}{z} dz = 0$ wenn $x > 0$

In ähnlicher Weise $\lim_{R\to\infty} \int_{\tilde{C}_2} \frac{e^{ixz}}{z} dz = 0$ wenn $x < 0$

Konturintegral entlang der offenen Halbkreise mit Radius r :

$\lim_{r\to 0^+} \int_{\tilde{C}_3} \frac{e^{ixz}}{z} dz = \lim_{r\to 0^+} \int_0^{\pi} ie^{ixre^{i\theta}} d\theta = \int_0^{\pi} i d\theta = \pi i$

$\lim_{r\to 0^+} \int_{\tilde{C}_4} \frac{e^{ixz}}{z} dz = \lim_{r\to 0^+} \int_{\pi}^{2\pi} ie^{ixre^{i\theta}} d\theta = \int_{\pi}^{2\pi} i d\theta = \pi i$

Hauptwert :

Wenn $x > 0$, $H_p(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i}(0 - 0 + \pi i) = 1$ und wenn $x < 0$, $H_p(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i}(0 + 0 - \pi i) = 0$

Anmerkung : Sokhotski-Plemelj-Formeln

$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} dx = \mp i\pi\varphi(0) + \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$

Hinweis : In den abgegebenen Lösungen haben einige Studenten die Formel $\mathrm{sgn}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} dk$ ohne Beweise verwendet. Aber bitte überlegen Sie nochmals, was in der Angabe gefragt ist: Die Konvergenz des Integrals ist die Frage. In der Tat ist der Beweis dieser Formel gelichewertig wie die Rechnung des Integrals in der Angabe. Die Umschreibung des Ausdrucks e^{ixt} mit trigonometrischen Funktionen oder der Heaviside-Funktion mit der Vorzeichenfunktion ist sicher nicht die Hauptfrage. Falls Sie einfach die Formel verwendet haben, versuchen Sie, das Integral zu rechnen. Das ist eine sehr sinnvole Übung und wertvoll für die kommenden Tutorien.