8. Tutorium **für 10.12.2021**
(Gruppen 1-8 : Online)

8.1 Verallgemeinerte Funktion

Berechnen und vereinfachen Sie folgende Ausdrücke der verallgemeinerten Funktionen. ($H(t)$ ist die Heaviside-Funktion)
a) $\frac{d}{dt}(t\delta(t))$
b) $\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)\left(H(t)e^{-\gamma t}\right)$
c) $\left(\frac{d^2}{dt^2}+2\gamma\frac{d}{dt}\right)\left(H(t)te^{-\gamma t}\right)$
d) $\frac{d^2}{dx^2}\sin|x|$

8.2 Greensche Funktion

Betrachten Sie den Differentialoperator

$$\mathcal{L}_t x(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2}+2\frac{d}{dt}-3\right)x(t).$$

Greensche Funktion mit Hilfe der Fouriertransformation finden.
a) Finden Sie die Fouriertransformation $\tilde{G}_I(\omega)$ einer Greenschen Funktion $G_I(t,t')$, welche die inhomogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_t G_I(t,t') = \delta(t-t')$ erfüllt.
b) Berechnen Sie die inverse Fouriertransformation von $\tilde{G}_I(\omega)$ und bestimmen Sie die Greensche Funktion $G_I(t,t')$.
c) Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_t x(t) = H(t)$ (Heaviside-Funktion) mit den Randbedingungen $x(t=0)=0$ und $\frac{dx}{dt}(t=0)=0$. (Hinweiß: Um eine Lösungen der homogenen Differentialgleichung $\mathcal{L}_t x(t) = 0$ zu finden, kann der Ansatz $x(t)=e^{at}$ hilfreich sein.)
Greensche Funktion mit Hilfe der Lösungen der homogenen Gleichung finden.
d) Schreiben Sie zwei lineare unabhängige Lösungen, $x_1(t)$ und $x_2(t)$, der homogenen Differentialgleichung $\mathcal{L}_t x(t) = 0$ an. (siehe auch Hinweiß in c).)
e) Verwenden Sie den Ansatz

$$G(t,t') = \begin{cases} A_1(t')x_1(t)+B_1(t')x_2(t) & (t<t') \\ A_2(t')x_1(t)+B_2(t')x_2(t) & (t'<t) \end{cases},$$

um die Greensche Funktion $G(t,t')$ in Abhängigkeit von Parametern $\alpha = A_1(0)$ und $\beta = B_1(0)$ zu berechnen. Hinweiß: Die Greensche Funktion erfüllt die Bedingungen

(i) Translationsinvarianz $G(t,t') = G(t-t',0)$

(ii) Stetigkeit der Greenschen Funktion, das heißt $\lim_{t\to t'^-} G(t,t') = \lim_{t\to t'^+} G(t,t')$

(iii) Aus der Identität $\mathcal{L}_t G(t,t') = \delta(t-t')$ folgt
$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \mathcal{L}_t G(t,t') dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \delta(t-t') dt = 1$

8.3 Sturm-Liouville-Problem

a) Transformieren Sie die Differentialgleichung

$$\mathcal{L}_x y = y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0\,, \qquad (y = y(x), x \in (-\infty, \infty))$$

in die Sturm-Liouville'sche Gestalt $\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + \lambda\rho(x)\right) y(x) = 0$.
b) Berechnen Sie für den Differentialoperator $\mathcal{L}_x$ in ursprünglicher Gestalt und in Sturm-Liouville'scher Gestalt den adjungierten Differentialoperator $\mathcal{L}_x^*$. Der adjungierte Differentialoperator $\mathcal{L}_x^*$ erfüllt $\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{L}_x y)\psi dx = \int_{-\infty}^{\infty} y(\mathcal{L}_x^* \psi) dx$.

Ankreuzbar: 1, 2ab, 2c, 2de, 3