8. Tutorium - Lösungen **10.12.2021**

Die 8. Übung behandelt auch die folgenden Abschnitte des Vorlesungsskriptums
link zum Skriptum → `http://tph.tuwien.ac.at/~svozil/publ/2019-mm.pdf`
• Kapitel 7 *verallgemeinerte Funktionen (=Distributionen)*:
Theorie zu Distributionen. Wie ist eine Distribution definiert? Was sind Testfunktionen, siehe auch Unterpunkt 7.3.1
Distributionen ableiten mit partiellem Integrieren, nicht nur Formeln abschreiben
Die Deltafunktion als Grenzwert von Deltafolgen wie in Unterpunkt 7.6.1 (Das dient dem Verstandnis zur Deltafuntkion, Deltafolgen sind dieses Semester aber nicht in Übungsbeispielen vorgekommen)
'Rechenregeln' in 7.6.3 für die Deltafunktion, inkl. Herleitung/Beweiß. Ergebnisse in 7.6.3 auch selber nachrechnen! z.b. $\delta(ax)$ für eine Konstante $a > 0$ und $a < 0$ wie in (7.63)
Fouriertransformation der Deltafunktion in 7.6.4 (das wird auch zur Berechnung der Greensche Funktion in Bsp 8.2a benötigt)
'Rechenregeln' für die Heavisidefunktion, u.a. Unterkapitel 7.12.1, 7.12.3 und 7.12.4. Rechnen mit weiteren Distributionen, z.b. sign Funktion in 7.13
Für Bsp 8.1 sind vorallem die Ableitungen von Distributionen relevant, dazu gibts einige Rechenbeispiele im Skriptum, nachrechnen!
• *Greenschen Funktion* Kapitel 8, hier wird bereits fast das ganze Kapitel behandelt
Beispiele ähnlich zu Bsp 8.2 der aktuellen Übung gibt es auch in Unterkapitel 8.6
Zur Berechnung der Greenschen Funktion mit Hilfe der Fouriertransformation sind auch die Grundlagen der Fouriertransformation notwendig, siehe Kapitel 6 (Fouriertransformierte der Deltafunktion → 7.6.4)
Wir behandeln wieder ein Integral ähnlich wie in Bsp 7.3 der Übung, dieses Integral kann mit dem Residuensatz umgeschrieben und gelöst werden, Unterkapitel 8.10 sollte hier so weit verstanden werden, dass solche Integrale auch selbst gelöst werden können (nicht nur Formel einsetzen!)
• In Kapitel 9 zur *Theorie von Sturm-Liouville* werden bereits Unterkapitel 9.1 und 9.2 behandelt

8.1 Verallgemeinerte Funktion

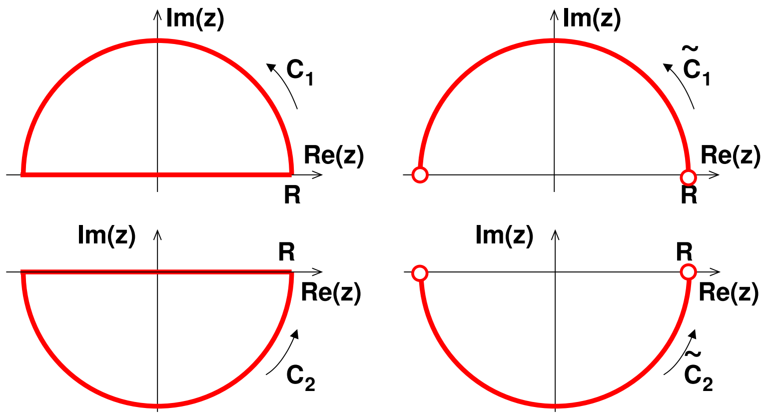
Distributionen sind lokal integrierbare Funktionen, diese Funktionen müssen aber nicht an jedem Punkt definiert werden zb Deltafunktion. Eine Funktion f wird als lokal integrierbar bezeichnet, falls
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi(x)dx < \infty$ für jede Testfunktion $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty$ (unendlich mal stetig ableitbar und kompakter Träger).
a) Die Ableitung ist null, da $\int_{-\infty}^{\infty} t\delta(t)\psi(t)dt \equiv 0$ für Testfunktion $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty$.
Als Übung, ableiten mit Testfunktion $\psi(t)$ und partiellem Integrieren,
$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}(t\delta(t))\psi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} t\delta(t)(\frac{d}{dt}\psi(t))dt = 0 \cdot \psi'(0) = 0$
Diese Lösung ergibt sich auch wenn wir zuerst Terme einzeln ableiten, mit zusätzlichen Rechenschritten:
$\frac{d}{dt}(t\delta(t)) = \delta(t) + t\frac{d}{dt}\delta(t)$
$\int t\frac{d}{dt}\delta(t)\psi(t)dt = -\int \delta(t)\frac{d}{dt}(t\psi(t))dt = -\int \delta(t)(\psi(t) + t\psi'(t))dt = -\psi(0) + 0\psi'(0) \to t\frac{d}{dt}\delta(t) = -\delta(t)$
Daher $\frac{d}{dt}(t\delta(t)) = 0$.
Im weiteren schreiben wir nicht jedes mal das Integral mit Testfunktion dazu, trotzdem sind die Ableitungen als solche zu verstehen.
b) $\left(\frac{d}{dt} + \gamma\right)\left(H(t)e^{-\gamma t}\right) = \delta(t)e^{-\gamma t} - \gamma H(t)e^{-\gamma t} + \gamma H(t)e^{-\gamma t} = \delta(t)$
Anmerkung : $G(t, t') = H(t - t')e^{-\gamma(t-t')}$ ist eine Greensche Funktion des Operators $\mathcal{L}_t = \frac{d}{dt} + \gamma$.
c) $\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt}\right)\left(H(t)te^{-\gamma t}\right) = \left(\frac{d}{dt} + 2\gamma\right)\left(\underbrace{\delta(t)t}_{=0}e^{-\gamma t} + H(t)e^{-\gamma t} - \gamma H(t)te^{-\gamma t}\right)$

$= \delta(t)e^{-\gamma t} - \gamma H(t)e^{-\gamma t} - \gamma\delta(t)te^{-\gamma t} - \gamma H(t)e^{-\gamma t} + \gamma^2 H(t)te^{-\gamma t} + 2\gamma H(t)e^{-\gamma t} - 2\gamma^2 H(t)te^{-\gamma t}$
$= \delta(t) - \gamma^2 H(t)te^{-\gamma t}$
Anmerkung : $G(t, t') = H(t-t')(t-t')e^{-\gamma(t-t')}$ ist eine Greensche Funktion des Operators $\mathcal{L}_t = \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \gamma^2$.
d) $\frac{d^2}{dx^2}\sin|x| = \frac{d}{dx}\mathrm{sgn}(x)\cos x = 2\delta(x)\cos x - \mathrm{sgn}(x)\sin x = 2\delta(x) - \mathrm{sgn}(x)\sin x = 2\delta(x) - \sin|x|$
Alternative Lösung: $\frac{d^2}{dx^2}\sin|x| = \frac{d}{dx}\left(H(x) - H(-x)\right)\cos x$
$= (\delta(x) + \delta(-x))\cos x - (H(x) - H(-x))\sin x = 2\delta(x) - (H(x) - H(-x))\sin x$
Anmerkung :

$\sin x = \operatorname{sgn}(x)\sin|x|$ und $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ aber $\frac{d}{dx}\operatorname{sgn}(x)\sin|x| = 2\delta(x)\sin|x| + (\operatorname{sgn}(x))^2\cos|x| = (\operatorname{sgn}(x))^2\cos|x|$
$\cos x = (\operatorname{sgn}(x))^2\cos|x|$ gilt nur wenn $x \neq 0$. (Der Wert $\operatorname{sgn}(x=0)$ ist nicht eindeutig definiert.)
$1 = H(t) + H(-t)$, die rechte Seite dieser Gleichung ist aber bei $t = 0$ nicht eindeutig definiert.
Angewendet an eine Testfunktion ψ erhalten wir $\int_{-\infty}^{\infty}(H(t) + H(-t))\psi(t)dt = \int_{-\infty}^{0}\psi(t)dt + \int_0^{\infty}\psi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)dt$.

8.2 Greensche Funktion

a) $\left(\frac{d^2}{dt^2}+2\frac{d}{dt}-3\right)x(t) = \left(\frac{d}{dt}+3\right)\left(\frac{d}{dt}-1\right)x(t) \to$ Fouriertransformierte $(-\omega^2+2i\omega-3)\widehat{x}(\omega) = -(\omega+i)(\omega-3i)\widehat{x}(\omega)$
Ansatz : $G_I(t,t') = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{G}_I(\omega)\,e^{i\omega(t-t')}d\omega$
$\mathcal{L}_t G_I(t,t') = \delta(t-t') \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-\omega^2+2i\omega-3)\tilde{G}_I(\omega)\,e^{i\omega(t-t')}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(t-t')}d\omega$
Vergleich der Integranden: $(-\omega^2+2i\omega-3)\tilde{G}_I(\omega) = 1$
$\to \tilde{G}_I(\omega) = -\frac{1}{\omega^2-2i\omega+3}$
b) Fourier-Transformation, Integral berechnen mit Partialbruchzerlegung
$\tilde{G}_I(\omega) = -\frac{1}{\omega^2-2i\omega+3} = -\frac{1}{(\omega+i)(\omega-3i)} = \frac{1}{4i}\left(\frac{1}{\omega+i} - \frac{1}{\omega-3i}\right)$
$G_I(t,t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega = \frac{1}{8\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega+i}d\omega - \frac{1}{8\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-3i}d\omega$



oberer Halbkreis :
$\tilde{C}_1 = \{z = Re^{i\theta}|0 < \theta < \pi\}$,
geschlossener oberer Halbkreis :
$C_1 = \tilde{C}_1 + \{z = x| - R < x < R\}$
unterer Halbkreis :
$\tilde{C}_2 = \{z = Re^{i\theta}|\pi < \theta < 2\pi\}$,
geschlossener unterer Halbkreis :
$C_2 = \tilde{C}_2 + \{z = x|R > x > -R\}$

Integrale berechnen wie in Bsp 7.3 ab). Vereinfache Notation $\tau = t - t'$, $R > 0$ und Polstelle $s = -1, 3$.
Fallunterscheidung. Für $\tau > 0$ betrachte $\int_{-R}^{R}\frac{e^{i\omega\tau}}{\omega-si}d\omega = \int_{C_1}\frac{e^{i\omega\tau}}{\omega-si}d\omega - \oint_{\tilde{C}_1}\frac{e^{i\omega\tau}}{\omega-si}d\omega$
$\oint_{\tilde{C}_1}\frac{e^{i\omega\tau}}{\omega-si}d\omega = \int_0^{\pi}\frac{e^{i\tau Re^{i\theta}}}{Re^{i\theta}-si}iRe^{i\theta}d\theta$, mit der Substitution $\omega = Re^{i\theta}$. Mit $e^{i\tau Re^{i\theta}} = e^{-\tau R\sin\theta}e^{i\tau R\cos\theta}$ haben wir
$\left|\oint_{\tilde{C}_1}\frac{e^{i\omega\tau}}{\omega-si}d\omega\right| \leq \int_0^{\pi}e^{-\tau R\sin\theta}\frac{R}{|Re^{i\theta}-si|}d\theta$
Der Term $\frac{R}{|Re^{i\theta}-si|}$ ist beschränkt für $R\to\infty$. Mit $\theta\in(0,\pi)$ und $\tau > 0$ gilt $e^{-\tau R\sin\theta}\to 0$ für $R\to\infty$.
Daher gilt $\left|\oint_{\tilde{C}_1}\frac{e^{i\omega\tau}}{\omega-si}d\omega\right| \to 0$ für $R\to\infty$ und $\tau > 0$.
Die Polstelle $\omega = 3i$ ist in C_1 und der Residualsatz ergibt $\int_{C_1}\frac{e^{i\omega\tau}}{\omega-3i}d\omega = 2\pi ie^{-3\tau}$.
Für $s = -1$ hat die Funktion keine Polstelle in C_1 und der Residualsatz ergibt $\int_{C_1}\frac{e^{i\omega\tau}}{\omega+i}d\omega = 0$.
Der Fall $\tau > 0$ zusammengefasst: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega\tau}}{\omega-3i}d\omega = 2\pi ie^{-3\tau}$ und $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega\tau}}{\omega+i}d\omega = 0$
Für $\tau < 0$ betrachte $\int_{-R}^{R}\frac{e^{i\omega\tau}}{\omega-si}d\omega = -\int_{C_2}\frac{e^{i\omega\tau}}{\omega-si}d\omega + \oint_{\tilde{C}_2}\frac{e^{i\omega\tau}}{\omega-si}d\omega$
Betrag vom Integral über den unteren Hablkreis
$\left|\oint_{\tilde{C}_2}\frac{e^{i\omega\tau}}{\omega-si}d\omega\right| \leq \int_{\pi}^{2\pi}e^{-\tau R\sin\theta}\frac{R}{|Re^{i\theta}-si|}d\theta$
Wir haben $-\tau R\sin\theta < 0$ weil $\tau < 0$ und $\theta\in(\pi,2\pi)$, das Integral über den unteren Halbkreis verschwindet also für $R\to\infty$.
Für $s = 3$ hat die Funktion keine Polstelle in C_2 und der Residualsatz ergibt $\int_{C_2}\frac{e^{i\omega\tau}}{\omega-3i}d\omega = 0$.
Die Polstelle $\omega = -i$ ist in C_2 und der Residualsatz ergibt $\int_{C_2}\frac{e^{i\omega\tau}}{\omega+i}d\omega = 2\pi ie^{\tau}$.
Der Fall $\tau < 0$ zusammengefasst: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega\tau}}{\omega-3i}d\omega = 0$ und $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega\tau}}{\omega+i}d\omega = -2\pi ie^{\tau}$
Wir erhalten $G_I(t,t') = -\frac{1}{4}H(t-t')e^{-3(t-t')} - \frac{1}{4}H(t'-t)e^{-(t'-t)}$
Das Integrale lässt sich auch ohne Partiablruchzerlegung mit dem Residualsatz berechnen:
$G_I(t,t') = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega\tau}}{(\omega+i)(\omega-3i)}d\omega$ mit $\tau = t - t'$.
Für $\tau > 0$ betrachte $\int_{-R}^{R}\frac{e^{i\omega\tau}}{(\omega+i)(\omega-3i)}d\omega = \int_{C_1}\frac{e^{i\omega\tau}}{(\omega+i)(\omega-3i)}d\omega - \oint_{\tilde{C}_1}\frac{e^{i\omega\tau}}{(\omega+i)(\omega-3i)}d\omega$
$\left|\oint_{\tilde{C}_1}\frac{e^{i\omega\tau}}{\omega-si}d\omega\right| \leq \int_0^{\pi}e^{-\tau R\sin\theta}\frac{R}{|Re^{i\theta}+i||Re^{i\theta}-3i|}d\theta \to 0$ für $R\to\infty$ da $-\tau R\sin\theta < 0$.

$\frac{e^{i\omega\tau}}{(\omega+i)(\omega-3i)}$ hat die Polstelle $\omega = 3i$ in C_1, das Residual dieser Funktion bei $\omega = 3i$ ist $\frac{1}{4i}e^{-3\tau}$.
und der Residualsatz ergibt $\int_{C_1} \frac{e^{i\omega\tau}}{(\omega+i)(\omega-3i)} d\omega = \frac{\pi}{2}e^{-3\tau} \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{(\omega+i)(\omega-3i)} = \frac{\pi}{2}e^{-3\tau}$ für $\tau > 0$.
Für $\tau < 0$ Integral über C_2, wir haben die Polstelle $\omega = -i$ in C_2 mit Residual $-\frac{1}{4i}e^{\tau}$
und der Residualsatz ergibt $\int_{C_2} \frac{e^{i\omega\tau}}{(\omega+i)(\omega-3i)} d\omega = -\frac{\pi}{2}e^{\tau} \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{(\omega+i)(\omega-3i)} = \frac{\pi}{2}e^{\tau}$ für $\tau > 0$.
Wir erhalten $G_I(t,t') = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{(\omega+i)(\omega-3i)} d\omega = -\frac{1}{4}(H(t-t')e^{-3(t-t')} + H(t'-t)e^{-(t'-t)})$
c) $x_I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_I(t,t')f(t')dt' = \int_{-\infty}^{\infty} G_I(t,t')H(t')dt' = \int_0^{\infty} G_I(t,t')dt'$
Wenn $t < 0$: fürs Integral $0 < t' < \infty$ gilt $t < t'$, also $G_I(t,t') = -\frac{1}{4}H(t'-t)e^{-(t'-t)}$.
$x_I(t<0) = \int_0^{\infty} G_I(t,t')dt' = -\frac{1}{4}\int_0^{\infty} e^{t-t'}dt' = \frac{1}{4}e^{t-t'}\big|_{t'=0}^{\infty} = -\frac{1}{4}e^t$
Wenn $t > 0$, teile das Integral in $0 < t' < t$ und $t < t' < \infty$ auf und setze $G_I(t,t')$ je nach Fall ein:
$x_I(t>0) = -\frac{1}{4}\int_0^t e^{-3(t-t')}dt' - \frac{1}{4}\int_t^{\infty} e^{t-t'}dt' = -\frac{1}{12}e^{-3(t-t')}\big|_{t'=0}^{t} + \frac{1}{4}e^{(t-t')}\big|_{t'=t}^{\infty} = -\frac{1}{12}(1-e^{-3t}) - \frac{1}{4}$
$= \frac{1}{12}e^{-3t} - \frac{1}{3}$.
$\lim_{t\to 0^+} x_I(t) = -\frac{1}{4}$ und $\lim_{t\to 0^-} x_I(t) = -\frac{1}{4}$
$\to x_I(0) = -\frac{1}{4}$
$x_I'(t<0) = -\frac{1}{4}e^t$ und $x_I'(t>0) = -\frac{1}{4}e^{-3t} \to \lim_{t\to 0} x_I'(t) = -\frac{1}{4}$
Für die inhomogene Lösung erhalten wir $x_I(t) = -\frac{1}{4}e^t H(-t) + (\frac{1}{12}e^{-3t} - \frac{1}{3})H(t)$.
Homogene Lösungen $\mathcal{L}_t x_{1,2} = 0$ finden, wir erhalten $x_1(t) = e^{-3t}$ und $x_2(t) = e^t$.
Ansatz für die Lösung um die Randbedingungen bei $t = 0$ zu erfüllen:
$x_0(t) = Ae^t + Be^{-3t}$
$x(t) = x_I(t) + x_0(t) = x_I(t) + Ae^t + Be^{-3t}$
$x'(t) = x_I'(t) + x_0'(t) = x_I'(t) + Ae^t - 3Be^{-3t}$
$x(0) = -\frac{1}{4} + A + B = 0$
$x'(0) = -\frac{1}{4} + A - 3B = 0$
$\to A = \frac{1}{4}$ und $B = 0$
$\to x(t) = x_I(t) + \frac{e^t}{4} = -\frac{1}{4}H(-t)e^t + H(t)(\frac{1}{12}e^{-3t} - \frac{1}{3}) + \frac{1}{4}e^t$
Vereinfachen mit $-\frac{1}{4}H(-t)e^t + \frac{1}{4}e^t = \frac{1}{4}H(t)e^t$,
$\to x(t) = H(t)(\frac{1}{12}e^{-3t} - \frac{1}{3}) + \frac{1}{4}H(t)e^t = H(t)(\frac{1}{12}e^{-3t} + \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{3})$
Nachrechnen: Für $t < 0$ gilt $x(t) = 0$, also $\mathcal{L}_t x(t) = 0 = H(t)$,
für $t > 0$ gilt $x(t) = \frac{1}{12}e^{-3t} + \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{3}$, $x'(t) = -\frac{1}{4}e^{-3t} + \frac{1}{4}e^t$ und $x''(t) = \frac{3}{4}e^{-3t} + \frac{1}{4}e^t$.
Zusammenfassen
$\mathcal{L}_t x(t)|_{t>0} = x''(t) + 2x'(t) - 3x(t) = \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{4} - \frac{3}{12}\right)e^{-3t} + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} - \frac{3}{4}\right)e^t + 1 = 1 = H(t)$.
Lösung erfüllt $\mathcal{L}_t x(t) = H(t)$!
Anmerkung, $x(t)$ ist nicht 2 mal stetig differenzierbar (bei $t = 0$) wir können $\mathcal{L}_t x(t)$ im klassischen Sinne nicht auswerten, das ist aber zu erwarten, da die Inhomogenität auch eine Sprungstelle hat. Diese Lösung der Differentialgleichung ist in einem distributionellen Sinn zu verstehen,
$\int_{-\infty}^{\infty}(\mathcal{L}_t x(t) - f(t))\psi(t)dt = 0$ für Testfunktionen ψ.
d) $\mathcal{L}_t x(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\frac{d}{dt} - 3\right)x(t) = \left(\frac{d}{dt} + 3\right)\left(\frac{d}{dt} - 1\right)x(t)$
Funktionen welche $(\frac{d}{dt} + 3)x(t) = 0$ oder $(\frac{d}{dt} - 1)x(t) = 0$ erfüllen sind homogene Lösungen von $\mathcal{L}_t$, also $x_1(t) = e^{-3t}$ und $x_2(t) = e^t$.
Auf dieses Ergebnis kommt man auch mit dem Ansatz $x(t) = e^{at}$, $\mathcal{L}_t e^{at} = (a^2 + 2a - 3)e^{at}$, Lösungen der quadratischen Gleichung sind $a_{1,2} = 1, -3$. Es ergibt sich wieder
$x_1(t) = e^{-3t}$ und $x_2(t) = e^t$.
e) $G(t,t') = \begin{cases} A_1(t')e^{-3t} + B_1(t')e^t & (t < t') \\ A_2(t')e^{-3t} + B_2(t')e^t & (t' < t) \end{cases}$
Translationsinvarianz (wenn a_i in $\mathcal{L}_t = \sum_i a_i d^i/dx^i$ konstante sind)
• $G(t,t') = G(t-t',0) = \begin{cases} A_1(0)e^{-3(t-t')} + B_1(0)e^{t-t'} & (t < t') \\ A_2(0)e^{-3(t-t')} + B_2(0)e^{t-t'} & (t' < t) \end{cases}$
A_1, A_2, B_1 und B_2 müssen also Konstanten sein (unabhängig von t).
Stetigkeit der Greenschen Funktion. Aus
$\lim_{t\to t'^-} G(t,t') = \lim_{t\to t'^+} G(t,t')$ folgt
• $A_1 + B_1 = A_2 + B_2$ bzw. $A_1 - A_2 = -B_1 + B_2$.
Bedingung iii) : $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \mathcal{L}_t G(t,t')dt = 1$.
im Integral für $\mathcal{L}_t$ einsetzen:
$\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}\left(\frac{d^2}{dt^2}G(t,t') + 2\frac{d}{dt}G(t,t') - 3G(t,t')\right)dt = \left(\frac{d}{dt}G(t,t') + 2G(t,t')\right)\Big|_{t=t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} - 3\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} G(t,t')dt$
Die Funktion $G(t,t')$ ist stückweiße stetig, wir dürfen das folgende Integral aufteilen und einsetzen

$\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} G(t,t')dt = \int_{t'-\varepsilon}^{0} G(t,t')dt + \int_{0}^{t'+\varepsilon} G(t,t')dt$
Diese zwei Terme verschwinden einzeln betrachtet im Limes $\varepsilon \to 0$, zb.
$\int_{t'-\varepsilon}^{t'} G(t,t')dt = \left(-\frac{1}{3}A_1 e^{-3(t-t')} + B_1 e^{t-t'}\right)\Big|_{t=t'-\varepsilon}^{t'} = -\frac{1}{3}A_1(e^{3\varepsilon}-1) + B_1(e^{\varepsilon}-1) \to 0$ für $\varepsilon \to 0$.
Aus der Bedingung, dass $G(t,t')$ stetig ist für $t \to t'$, folgt bereits $\left(G(t,t')\right)\Big|_{t=t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} = 0$
(Man muss diesen Term aber nicht kürzen um zum richtigen Ergebnis zu kommen!)
Es bleibt übrig $\left(\frac{d}{dt}G(t,t')\right)\Big|_{t=t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}$ ... auswerten ergibt
$t = t' - \varepsilon \ldots \frac{d}{dt}G(t,t') = -3A_1 e^{-3(t-t')} + B_1 e^{t-t'} = -3A_1 e^{3\varepsilon} + B_1 e^{-\varepsilon} \to -3A_1 + B_1$ für $\varepsilon \to 0$.
$t = t' + \varepsilon \ldots \frac{d}{dt}G(t,t') = -3A_2 e^{3\varepsilon} + B_2 e^{-\varepsilon} \to -3A_2 + B_2$ für $\varepsilon \to 0$.
Aus der Bedingung $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \mathcal{L}_t G(t,t')dt = 1$ folgt also
• $B_2 - 3A_2 - (B_1 - 3A_1) = 1$.
Erweitere $B_2 - 3A_2 - B_1 + 3A_1 = 1$ mit $-A_2 - B_2 + A_1 + B_1 = 0$ (Bedingung ii)):
$\to -4A_2 + 4A_1 = 1 \to -A_2 + A_1 = 1/4$
Auf ähnliche Weiße erhalten wir
$4B_2 - 4B_1 = 1 \to B_2 - B_1 = 1/4$
Zusammenfassen mit $A_1 = \alpha$, $A_2 = \alpha - 1/4$, $B_1 = \beta$ und $B_2 = 1/4 + \beta$,

$$G(t,t') = \begin{cases} \alpha e^{-3(t-t')} + \beta e^{t-t'} & (t < t') \\ (\alpha - 1/4)e^{-3(t-t')} + (1/4+\beta)e^{t-t'} & (t' < t) \end{cases}$$

Anmerkung: Die Greensche Funktion ist durch $\alpha = 0$ und $\beta = -1/4$ gegeben, mit diesen Parametern ist $G(t,t')$ in t' integrierbar ist, das ist notwendig um $\int_{-\infty}^{\infty} G(t,t')f(t')dt'$ zu berechnen (diese Bedingung hängt aber auch von f ab). Mit Fouriertransformation wie in ab) gibt es keine Parameter zu wählen; die Fouriertransformierte gibt es nur für integrierbare Funktionen und $G(t,t')$ integrierbar steckt in ab) schon implizit drinnen.

8.3 Sturm-Liouville-Problem

Die Sturm-Liouville'schen Gestalt:
$\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + \lambda\rho(x)\right)y(x) = 0 \to p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0$
$\to a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$ allgemeine Schreibweiße
mit $a_2 = p$, $a_1 = p'$ und $a_0 = q(x) + \lambda\rho(x)$.
a) (Hermitesche Differentialgleichung) $y''(x) - 2xy'(x) + 2\alpha y(x) = 0$
Vergleich mit der Differentialgleichung in der Sturm-Liouville'schen Gestalt :
$p'(x)/p(x) = -2x$, $q(x)/p(x) = 0$ und $\lambda\rho(x)/p(x) = 2\alpha \to \log(p(x)) = -x^2$
$\to p(x) = e^{-x^2}$, $q(x) = 0$ und $\lambda\rho(x) = 2\alpha e^{-x^2}$. $\to \left(\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\frac{d}{dx}\right] + 2\alpha e^{-x^2}\right)y(x) = 0$
b) Mit der Annahme, dass y und ψ über $\mathbb{R}$ integrierbar sind, müssen dir Randterme beim partiellen Integrieren nicht berücksichtigt werden $y(-\infty) = \psi(-\infty) = y(\infty) = \psi(\infty) = 0$.
$\int_{-\infty}^{\infty} y''\psi = \int_{-\infty}^{\infty} y\psi''$, 2 mal partiell Abgeleitet.
$\int_{-\infty}^{\infty} -2xy'\psi = \int_{-\infty}^{\infty} 2y(x\psi)' = \int_{-\infty}^{\infty} 2y\psi + 2xy\psi'$.
Daher $\mathcal{L}_x^*\psi = \psi'' + 2x\psi' + (2\alpha+2)\psi$. Der Differentialoperator in ursprünglicher Form ist nicht selbstadjungiert.
Für den Differentialoperator in Sturm-Liouville'sche Gestalt $\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + \lambda\rho(x)\right)y(x)$ gilt
$\int_{-\infty}^{\infty}(py')'\psi = -\int_{-\infty}^{\infty} py'\psi' = \int_{-\infty}^{\infty} y(p\psi')'$, der Operator in Sturm-Liouville'sche Gestalt ist selbstadjungiert.