**9. Tutorium** **für 17.12.2021**
(Gruppen 1-8 : Online)

## 9.1 Gamma- und Beta-Funktionen

a) Berechnen Sie für positive Konstanten $m, k, T$ und Ganzzahl $n$ das Integral

$$\overline{v^n} = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int_{-\infty}^{\infty} v^n e^{-mv^2/(2kT)} dv$$

und schreiben Sie das Endergebnis mithilfe der Gamma-Funktion an.
b) Schreiben Sie den Ausdruck

$$\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdots\frac{2k-1}{2}\frac{2k+1}{2}$$

mithilfe der Fakultät (aber ohne Doppelfakultät) um.
c) Zeigen Sie, dass für Ganzzahl $n$ das Integral

$$I_n = \int_{-1}^{1} \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} dx = B\left(n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

wobei $B(x, y)$ die Beta-Funktion ist. Berechnen Sie das Integral $I_n$ für $n = 1, 2, 3, 4$

## 9.2 Greensche Funktion (II)

Betrachten Sie eine inhomogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_t y(t) = \delta(t - t')$ wobei der Operator $\mathcal{L}_t$ durch

$$\mathcal{L}_t y(t) = \left(\frac{d}{dt} + 2i\right)\left(\frac{d}{dt} - i\right) y(t)$$

definiert ist.
a) Finden Sie die Fouriertransformation $\tilde{G}_I(\omega)$ einer Greenschen Funktion $G_I(t, t')$, die die inhomogene Differentialgleichung erfüllt und zeigen Sie, dass die Pole der Greenschen Funktion $\tilde{G}_I(\omega)$ auf der reellen $\omega$-Achse liegen.
b) Berechnen Sie den Cauchyschen Hauptwert der inversen Fouriertransformation $G_P(t - t') = \frac{1}{2\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\omega) e^{i\omega(t-t')} d\omega$.

## 9.3 Separationsansatz und Sturm-Liouville-Problem II

a) Führen Sie den Separationsansatz $\psi(x,y) = f(x)g(y)$ der Differentialgleichung

$$(1-x^2)y\partial_x^2\psi(x,y) - xy\partial_x\psi(x,y) + y^2\partial_y^2\psi(x,y) + \partial_y\psi(x,y) = 0$$

($-1 \leq x \leq 1$ und $y > 0$) durch und schreiben Sie die Differentialgleichungen der $x$- und $y$-Koordinaten an. Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung der $x$-Koordinate durch $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = -\lambda f(x)$ gegeben ist.
b) Transformieren Sie die Differentialgleichung der $x$-Koordinate $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = -\lambda f(x)$ in die Sturm-Liouville'sche Gestalt

$$\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + \lambda\rho(x)\right) f(x) = 0\,.$$

c) Schreiben Sie unter Verwendung des Ansatzes $f(x) = a_1x + a_3x^3$ die Differentialgleichung aus (b) in die Matrixdarstellung $\mathbf{M}\mathbf{a} = -\lambda\mathbf{a}$ um, wobei $\mathbf{a} = (a_1\ a_3)$ und $\mathbf{M}$ eine $2\times 2$ Matrix ist.
d) Berechnen Sie die Eigenwerte $\lambda_i$ ($\lambda_1 < \lambda_2$) und die Rechtseigenvektoren der Matrix $\mathbf{M}$ aus (c) und schreiben Sie die Eigenfunktionen $f_i(x)$ der Differentialgleichung an. Nehmen Sie an, dass für die Eigenvektoren $a_1 = 1$, und bestimmen Sie nur $a_3$. Die Eigenvektoren müssen nicht normiert sein.
e) Berechnen Sie die Matrixelemente $L_{ij}$ des Operators $\mathcal{L}_x = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x)$ aus (b) bezüglich der Basis $\{f_1(x), f_2(x)\}$.
Hinweis : $L_{ij} = \int_{-1}^{1} f_i(x)\mathcal{L}_x f_j(x)dx$

---

Ankreuzbar: 1a-c, 2ab, 3a, 3bc, 3de