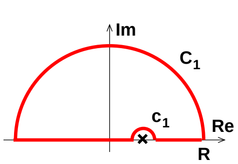
9. Tutorium - Lösungen **17.12.2021**

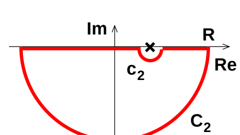
9.1 Gamma- und Beta-Funktionen

a) $\overline{v^n} = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int_{-\infty}^{\infty} v^n e^{-mv^2/(2kT)} dv = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int_{-\infty}^{0} v^n e^{-mv^2/(2kT)} dv + \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int_{0}^{\infty} v^n e^{-mv^2/(2kT)} dv$
$= (-1)^n \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int_{0}^{\infty} v^n e^{-mv^2/(2kT)} dv + \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int_{0}^{\infty} v^n e^{-mv^2/(2kT)} dv$
$= \begin{cases} 0 & \text{für ungerades } n \\ 2\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int_{0}^{\infty} v^n e^{-mv^2/(2kT)} dv & \text{für gerades } n \end{cases}$
Koordinatentransformation für gerades n :
$t = mv^2/(2kT) \to v^2 = 2kTt/m$ und $dt = dv\, mv/(kT) = dv\sqrt{2mt/(kT)}$
$\overline{v^n} = 2\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int_{0}^{\infty} v^n e^{-mv^2/(2kT)} dv = 2\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int_{0}^{\infty} \left(\frac{2kT}{m} t\right)^{n/2} e^{-t} \sqrt{\frac{kT}{2m}} t^{-1/2} dt$
$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{n/2} \int_0^\infty t^{(n-1)/2} e^{-t} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{n/2} \Gamma((n+1)/2)$
b)
$\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdots\frac{2k-1}{2}\frac{2k+1}{2} = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)\cdot(2k+1)}{2^{k+1}} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdots(2k-1)\cdot(2k)\cdot(2k+1)}{2^{k+1}\cdot2\cdot4\cdots(2k)} = \frac{(2k+1)!}{2^{k+1}\cdot2^k\cdot1\cdot2\cdots k} = \frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}k!} = \frac{(2k+2)!}{2^{2k+2}(k+1)!}$
Anmerkung 1 : Das Ergebnis aus (a)
$\overline{v^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{n/2} \Gamma((n+1)/2) = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{n/2} \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdots\frac{n-1}{2}$
Anmerkung 2 : Die Fakultät $n!$ ist für nicht-negative Ganzzahlen n definiert. Die Gamma-Funktion ist die Erweiterungen der Fakultät für nicht-ganze Zahlen.
c) Koordinatentransformation : $t = x^2$ und $dt = 2xdx$
$I_n = \int_{-1}^{1} \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t}} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \int_0^1 t^{n-1/2}(1-t)^{-1/2} dt = B(n+1/2, 1/2)$
$= \Gamma(1/2)\Gamma(n+1/2)/\Gamma(n+1) = \frac{n-1/2}{n}\Gamma(1/2)\Gamma(n-1/2)/\Gamma(n)$
Wenn $n = 1$, $I_1 = \Gamma(1/2)\Gamma(3/2)/\Gamma(2) = \frac{\pi}{2}$
Wenn $n = 2$, $I_2 = \frac{3/2}{2} I_1 = \frac{3\pi}{8}$
Wenn $n = 3$, $I_3 = \frac{5/2}{3} I_2 = \frac{5\pi}{16}$
Wenn $n = 4$, $I_4 = \frac{7/2}{4} I_2 = \frac{35\pi}{128}$
Anmerkung : m-dimensionale Kugel (siehe Bsp.7.2)
Volumen : $V_m(R) = R^m V_m(1) \to V_m(R) = \int_{-R}^{R} V_{m-1}(\sqrt{R^2 - x^2}) dx = V_{m-1}(1) \int_{-R}^{R} (\sqrt{R^2-x^2})^{m-1} dx$
Koordinatentransformation : $t = (x/R)^2$
$V_m(R) = RV_{m-1}(R) \int_0^1 (1-t)^{(m-1)/2} t^{-1/2} dt = RV_{m-1}(R) B((m+1)/2, 1/2)$
oder, wenn $m = 2n$, $V_{2n}(R) = RV_{2n-1}(R) B(n+1/2, 1/2)$

9.2 Greensche Funktion (II)

a) Fourierentwicklung der Greenschen Funktion: $G(t,t') = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\omega)\, e^{i\omega(t-t')} d\omega$
Ersetzung in die Differentialgleichung $\mathcal{L}_t G(t,t') = \delta(t-t')$
$\to \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega + 2i)(i\omega - i)\tilde{G}(\omega)\, e^{i\omega(t-t')} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega$
Vergleich der Integranden: $\tilde{G}(\omega) = -\frac{1}{(\omega+2)(\omega-1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\omega+2} - \frac{1}{\omega-1}\right)$
2 Pole sind $\omega = -2, 1$
b) $G_P(t,t') = \mathcal{P}\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\omega) e^{i\omega(t-t')} d\omega = \frac{1}{6\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega+2} d\omega - \frac{1}{6\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-1} d\omega$
Der Hauptwert $\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-\Omega} d\omega = \lim_{\epsilon\to0^+} \left[\int_{-\infty}^{\Omega-\epsilon} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-\Omega} d\omega + \int_{\Omega+\epsilon}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-\Omega} d\omega\right]$
wird mithilfe des Konturintegrals (siehe Abb.) gerechnet.





$C_1 = \{z = Re^{i\theta} | 0 < \theta < \pi\}$,
$c_1 = \{r = \Omega + re^{i\theta} | 0 < \theta < \pi\}$
$C_{01} = C_1 - c_1 + \{x | -R < x < \Omega - r\} + \{x | \Omega + r < x < R\}$
$C_2 = \{z = Re^{i\theta} | \pi < \theta < 2\pi\}$,
$c_2 = \{r = \Omega + re^{i\theta} | \pi < \theta < 2\pi\}$
$C_{02} = C_2 - c_2 - \{x | -R < x < \Omega - r\} - \{x | \Omega + r < x < R\}$

- Wenn $t > t'$,

  $\int_{C_1} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega} dz = \int_0^\pi \frac{e^{iR(t-t')\cos\theta - R(t-t')\sin\theta}}{Re^{i\theta}-\Omega} iRe^{i\theta} d\theta$

  Da $(t-t')\sin\theta > 0$, konvergiert im Limes $R \to \infty$, $\int_{C_1} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega} dz \to 0$

  $\int_{c_1} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega} dz = \int_0^\pi \frac{e^{i\Omega(t-t')+ire^{i\theta}(t-t')}}{re^{i\theta}} i\theta re^{i\theta} d\theta = \int_0^\pi e^{i\Omega(t-t')+ire^{i\theta}(t-t')} id\theta \xrightarrow{r\to 0} ie^{i\Omega(t-t')} \int_0^\pi d\theta = i\pi e^{i\Omega(t-t')}$

  $\oint_{C_{01}} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega} dz = 0$

  $\mathcal{P} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega} dz = \lim_{R\to\infty} \lim_{r\to 0} \left[\oint_{C_{01}} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega} dz - \oint_{C_1} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega} dz + \oint_{c_1} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega} dz \right] = i\pi e^{i\Omega(t-t')}$

- Wenn $t < t'$,

  in ähnlicher Weise, $\int_{C_2} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega} dz \xrightarrow{r\to\infty} 0$, $\int_{c_2} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega} dz \xrightarrow{r\to 0} i\pi e^{i\Omega(t-t')}$, $\oint_{C_{02}} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega} dz = 0$

  $\mathcal{P} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega} dz = \lim_{R\to\infty} \lim_{r\to 0} \left[-\oint_{C_{02}} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega} dz + \oint_{C_2} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega} dz - \oint_{c_2} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega} dz \right] = -i\pi e^{i\Omega(t-t')}$

Endlich,
$G_P(t,t') = \mathcal{P}\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \tilde{G}(\omega) e^{i\omega(t-t')} d\omega = \frac{i}{6} \left(H(t-t')(e^{-2i(t-t')} - e^{i(t-t')}) - H(t'-t)(e^{-2i(t-t')} - e^{i(t-t')}) \right)$
Anmerkung 1 : Das Integral kann auch mit einer Verschiebung der Pole $\omega = -2 + i\varepsilon, 1 + \varepsilon$ gerechnet werden.
$G_+(t,t') = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{6\pi} \left[\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega+2-i\varepsilon} d\omega - \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-1-i\varepsilon} d\omega \right] = \frac{i}{3} H(t-t') \left(e^{-2i(t-t')} - e^{i(t-t')} \right)$ (Nachrechnen!)
Mit dem Sokhotski-Plemelj-Formeln $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon} dx = i\pi\varphi(0) + \mathcal{P} \int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx$
wird der Hauptwert gerechnet als :
$G_P(t,t') = -i\pi \frac{1}{6\pi} e^{i\omega(t-t')}|_{\omega+2=0} + i\pi \frac{1}{6\pi} e^{i\omega(t-t')}|_{\omega-1=0} + G_+(t,t') = -\frac{i}{6} \left(e^{-2i(t-t')} - e^{i(t-t')} \right) + G_+(t,t')$
$G_0(t,t') = G_P(t,t') - G_+(t,t')$ ist eine Lösung der homogenen Differentialgleichung $\mathcal{L}_t G_0(t,t') = 0$.
Anmerkung 2 : Analogie zum Spektraltheorem
$e^{i\omega t}$: (orthogonale) Eigenfunktion des Differentialoperators, d.h. $\mathcal{L}e^{i\omega t} = -(\omega+2)(\omega-1)e^{i\omega t} \equiv \lambda(\omega) e^{i\omega t}$
Spektraltheorem : $\langle t|\mathcal{L}|t'\rangle = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^\infty \lambda(\omega) e^{i\omega(t-t')} d\omega \left(= \sum_\lambda \lambda(\omega) \frac{\langle t|\omega\rangle\langle\omega|t'\rangle}{\langle\omega|\omega\rangle} \text{ mit } \langle t|\omega\rangle = e^{i\omega t} \right)$
Inhomogene Differentialgleichung $\mathcal{L}G(t,t') = \langle t|\mathcal{L}G|t'\rangle = \delta(t-t')$
$\to G(t,t') = \langle t|G|t'\rangle = \langle t|\mathcal{L}^{-1}|t'\rangle$ ($\delta(t-t')$ ist analog zur Einheitsmatrix)
Greensche Funktion : $G(t,t') = \langle t|\mathcal{L}^{-1}|t'\rangle = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\lambda(\omega)} e^{i\omega(t-t')} d\omega$ wobei $\frac{1}{\lambda(\omega)} = \tilde{G}(\omega)$
In allgemeinen Fällen, wenn die Eigenfunktionen des Differentialoperators gefunden werden können (siehe Sturm-Liouville-Problem), kann eine Greensche Funktion mithilfe des "Spektraltheorems" bestimmt werden kann.

9.3 Separationsansatz und Sturm-Liouville-Problem

a)Separationsansatz : $\psi(x,y) = f(x)g(y)$
$(1-x^2)yf''(x)g(y) - xyf'(x)g(y) + y^2 f(x)g''(y) + f(x)g'(y) = 0$
$(1-x^2)f''(x)g(y) - xf'(x)g(y) + yf(x)g''(y) + \frac{1}{y} f(x)g'(y) = 0$
$(1-x^2)\frac{f''(x)}{f(x)} - x\frac{f'(x)}{f(x)} + y\frac{g''(y)}{g(y)} + \frac{1}{y}\frac{g'(y)}{g(y)} = 0$
$-(1-x^2)\frac{f''(x)}{f(x)} + x\frac{f'(x)}{f(x)} = y\frac{g''(y)}{g(y)} + \frac{1}{y}\frac{g'(y)}{g(y)}$
linke Seite: Funktion von x (und unabhängig von y), rechte Seite: Funktion von y (und unabhängig von x)
$\to$ Die Gleichung gilt für beliebige x, y nur wenn die beide Seiten konstant sind (unabhängig von x, y).
$-(1-x^2)\frac{f''(x)}{f(x)} + x\frac{f'(x)}{f(x)} = y\frac{g''(y)}{g(y)} + \frac{1}{y}\frac{g'(y)}{f(y)} = \lambda$
$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = -\lambda f(x)$
b) Die Sturm-Liouville'schen Gestalt:
$\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + \lambda\rho(x)\right) f(x) = 0 \to p(x)f''(x) + p'(x)f'(x) + q(x)f(x) + \lambda\rho(x)f(x) = 0$
Vergleich mit der Differentialgleichung in der Sturm-Liouville'schen Gestalt :
$p'(x)/p(x) = -x/(1-x^2) = (1/2)(1/(1+x) - 1/(1-x))$, $q(x)/p(x) = 0$ und $\rho(x)/p(x) = 1/(1-x^2)$
$\to p(x) = (1-x^2)^{1/2}$, $q(x) = 0$, $\rho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$
c)
$f(x) = a_1 x + a_3 x^3$, $f'(x) = a_1 + 3a_3 x^2$, $f''(x) = 6a_3 x$
$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = -\lambda f(x)$
$\to (1-x^2)(6a_3 x) - x(a_1 + 3a_3 x^2) = -\lambda(a_1 x + a_3 x^3)$
$\to -9a_3 x^3 + (6a_3 - a_1)x = -\lambda(a_1 x + a_3 x^3)$
Diese Gleichung gilt für beliebige werte von x

$-9a_3 = -\lambda a_3$, $6a_3 - a_1 = -\lambda a_1 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Anmerkung : Die Koeffizientenvergleich deutet an, dass $\{x, x^3\}$ eine linearunabhängige Basis ist. (x^3 ist ein Potenz und nicht eine kontravariante Komponente)

d)

$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 6 \\ 0 & \lambda - 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 6 \\ 0 & \lambda - 9 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 9) = 0 \rightarrow \lambda = 1, 9$

Wenn $\lambda_1 = 1$, ist der Eigenvektor $(1, 0)$. $f_1(x) = x$

Wenn $\lambda_2 = 9$, ist der Eigenvektor $(1, -4/3)$. $f_2(x) = x - (4/3)x^3$

e) $L_{11} = \int_{-1}^{1} f_1(x)\mathcal{L}_x f_1(x)dx = \int_{-1}^{1} f_1(x)(-\lambda_1)\rho(x)f_1(x)dx = -\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2}$

$L_{12} = \int_{-1}^{1} f_1(x)\mathcal{L}_x f_2(x)dx = \int_{-1}^{1} f_1(x)(-\lambda_2)\rho(x)f_2(x)dx = -9\int_{-1}^{1} \frac{x^2-(4/3)x^4}{\sqrt{1-x^2}} = -9\frac{\pi}{2} + 12a_1^2\frac{3\pi}{8} = 0$

$L_{21} = \int_{-1}^{1} f_2(x)\mathcal{L}_x f_1(x)dx = \int_{-1}^{1} f_2(x)(-\lambda_1)\rho(x)f_1(x)dx = (1/9)L_{12} = 0$

$L_{22} = \int_{-1}^{1} f_2(x)\mathcal{L}_x f_2(x)dx = -9\int_{-1}^{1} f_2(x)\rho(x)f_2(x)dx = -9\int_{-1}^{1} \frac{(x-(4/3)x^3)^2}{\sqrt{1-x^2}} = -9\left(\frac{\pi}{2} - \frac{8}{3}\frac{3\pi}{8} + \frac{16}{9}\frac{5\pi}{16}\right) = -\frac{\pi}{2}$

Anmerkung : Das Endergebnis zeigt, dass die Eigenfunktionen (mit der Gewichtsfunktion $\rho(x)$) orthogonal zu einander sind. Die Symmetrie in der Matrixdarstellung bedeutet, dass der Differentialoperator selbstadjungiert ist.