Name: Tutoriumsgruppe:
Matr. Nr.: Hörsaal: Sitzplatznummer:
Anzahl der abgegebenen Blätter (inkl. Deckblatt):

Mathematische Methoden der Theoretischen Physik (UE, 135.044)

1. Test, 18. 11. 2022, 2022W

1 (30 Punkte) Rechenbeispiele

a) Berechnen Sie $\varepsilon_{ijk}a_i b_j c_k$ für

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ sei eine nicht-orthogonale Basis in einem Vektorraum V. Die Basisvektoren im dualen Raum V^* werden in einer Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$ als

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \\ \mathbf{f}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^3 \end{pmatrix}$$

dargestellt. Stellen Sie die Basisvektoren $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ im Vektorraum V bezüglich der Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ dar.

c) $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ sei eine Orthonormalbasis. Berechnen Sie die Determinante der Transformationsmatrix $\mathbf{S}$, wobei

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \mathbf{S}$$

((i, j, k) ist eine Permutation von (1, 2, 3)).

d) Ein Vektor $\mathbf{x}$ lässt sich in einer Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ als $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ darstellen. Berechnen und vereinfachen Sie $(\partial_i x_j)(\partial_i x_j) + (\partial_i x_i)(\partial_j x_j)$, wobei $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

BITTE WENDEN

2 (35 Punkte) Spektraltheorem

$\hat{\mathbf{P}}_i$ $(i = 1, 2)$ sei der Orthogonalprojektor auf den Vektor $\mathbf{f}_i$. Die Projektoren werden in einer Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ als

$$\hat{\mathbf{P}}_1 = \frac{4}{5}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{2}{5}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \frac{2}{5}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{1}{5}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$$

und

$$\hat{\mathbf{P}}_2 = \frac{1}{5}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \frac{2}{5}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \frac{2}{5}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{4}{5}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$$

dargestellt. Beantworten Sie die folgenden Fragen. (**Hinweis: Überlegen Sie kurz, was gefragt und angegeben sind, bevor Sie die Rechnungen anfangen.**)

a) Stellen Sie die Vektoren $\mathbf{f}_1$ und $\mathbf{f}_2$ in der Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ dar.

b) Zeigen Sie, $\hat{\mathbf{P}}_1 \cdot \hat{\mathbf{P}}_2 = 0$ und $\hat{\mathbf{P}}_{\underline{i}} \cdot \hat{\mathbf{P}}_{\underline{i}} = \hat{\mathbf{P}}_i$ (ohne Summe über i).

c) Schreiben Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren des Operators $\hat{\mathbf{Q}} = 3\hat{\mathbf{P}}_1 - 2\hat{\mathbf{P}}_2$ an.

d) Stellen Sie den Operator $\hat{\mathbf{Q}}^n$ als eine Matrix dar und bestimmen Sie die Matrixelemente bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

e) Schreiben Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren des Operators $\hat{\mathbf{Q}}^n$ an.

3 (35 Punkte) Tensor

a) Sei V der von der Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ aufgespannte Vektorraum. Ein Tensor zweiter Stufe $\hat{\mathbf{A}}$ ist eine lineare Abbildung $(V \to V)$ und ist durch $\hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ und $\hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ definiert. Der Tensor wird in der Basis $\mathcal{B}$ als $\hat{\mathbf{A}} = a^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ dargestellt. Bestimmen Sie die kontravarianten Koordinaten a^{ij} des Tensors $\hat{\mathbf{A}}$.

b) Eine nicht-orthogonale Basis $\mathcal{F} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ ist durch $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_j s^j{}_i$ gegeben, wobei

$$\begin{pmatrix} s^1{}_1 & s^1{}_2 \\ s^2{}_1 & s^2{}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die kontravarianten Komponenten a'^{ij} des Tensors $\hat{\mathbf{A}}$ bezüglich der Basis $\mathcal{F}$.

c) Berechnen Sie die Elemente g'_{ij} des metrischen Tensors von der Basis $\mathcal{F}$.

d) Wie lauten die Komponenten $a'^i{}_j$ des Tensors $\hat{\mathbf{A}}$ in der gemischten Darstellung (d.h. $\hat{\mathbf{A}} = a'^i{}_j \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^j$)?

e) Berechnen Sie die Länge $\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ des Vektors $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2)$.