1. Test - Lösungen **18.11.2022**

1 [30 Punkte] Rechenbeispiele

a) $\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k \to$ z.B. $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

b) Für Orthonormalbasis $\mathbf{e}_i = \delta_{ij}\mathbf{e}^j$

$\mathbf{f}_1$ ist orthogonal zu $\mathbf{f}^2$ und $\mathbf{f}^3$. $\mathbf{f}_1 = c\mathbf{f}^2 \times \mathbf{f}^3 = c(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$ und $\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}^1 = c = 1 \to \mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$

$\mathbf{f}_2$ ist orthogonal zu $\mathbf{f}^3$ und $\mathbf{f}^1$. $\mathbf{f}_2 = c\mathbf{f}^3 \times \mathbf{f}^1 = c(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$ und $\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}^2 = c = 1 \to \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$

$\mathbf{f}_3$ ist orthogonal zu $\mathbf{f}^1$ und $\mathbf{f}^2$. $\mathbf{f}_3 = c\mathbf{f}^1 \times \mathbf{f}^2 = c(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$ und $\mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{f}^3 = c = 1 \to \mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$

Alternativ : $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \\ \mathbf{f}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \mathbf{S} = \mathbf{TS} \to \mathbf{S} = \mathbf{T}^{-1}$

$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_\ell s_{\ell 1}$, Koeffizientenvergleich : $s_{\ell 1} = 1$ wenn $i = \ell$, sonst $s_{\ell 1} = 0 \to s_{\ell 1} = \delta_{\ell i}$

In gleicher Weise $s_{m2} = \delta_{mj}$ und $s_{n3} = \delta_{nk}$

$\det\mathbf{S} = \varepsilon_{\ell mn}s_{\ell 1}s_{m2}s_{n3} = \varepsilon_{\ell mn}\delta_{\ell i}\delta_{mj}\delta_{nk} = \varepsilon_{ijk}$

Alternativ : Wenn i, j, k eine Permutation von $(1, 2, 3)$ ist, ist $\mathbf{S}$ eine Permutation der Spalten in der Einheitsmatrix. Für eine gerade Permutation $\det\mathbf{S} = 1$ und für eine ungerade Permutation $\det\mathbf{S} = -1$.

d) $(\partial_i x_j)(\partial_i x_j) + (\partial_i x_i)(\partial_j x_j) = \delta_{ij}\delta_{ij} + \delta_{ii}\delta_{jj} = \delta_{ii} + \delta_{ii}\delta_{jj} = 12$

2 [35 Punkte] Spektraltheorem

a) Projektor auf den Vektor $\mathbf{f}_1$: $\hat{\mathbf{P}}_1\mathbf{x}$ ist parallel zum Vektor $\mathbf{f}_1$

z.B. $\hat{\mathbf{P}}_1\mathbf{e}_1 = \frac{4}{5}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{5}\mathbf{e}_2 = \frac{2}{5}(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \to \mathbf{f}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ oder $\mathbf{f}_1 = c(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ mit einem beliebige c $(c \neq 0)$

$\hat{\mathbf{P}}_2\mathbf{x}$ ist parallel zum Vektor $\mathbf{f}_2$

z.B. $\hat{\mathbf{P}}_2\mathbf{e}_1 = \frac{1}{5}(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) \to \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$ oder $\mathbf{f}_2 = c(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2)$ mit einem beliebige c $(c \neq 0)$

b) $\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 = 0$: $\mathbf{f}_1$ und $\mathbf{f}_2$ sind orthogonal

$\hat{\mathbf{P}}_1 \cdot \hat{\mathbf{P}}_2 = \frac{\mathbf{f}_1 \otimes \mathbf{f}_1}{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1} \cdot \frac{\mathbf{f}_2 \otimes \mathbf{f}_2}{\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2} = \frac{1}{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1} \frac{1}{\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2} \mathbf{f}_1 \otimes \underbrace{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2}_{=0} \otimes \mathbf{f}_2 = 0$

$\hat{\mathbf{P}}_1 \cdot \hat{\mathbf{P}}_1 = \frac{1}{(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1)^2} \mathbf{f}_1 \otimes (\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1) \otimes \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1} \mathbf{f}_1 \otimes \mathbf{f}_1 = \hat{\mathbf{P}}_1$

Ebenso $\hat{\mathbf{P}}_2 \cdot \hat{\mathbf{P}}_2 = \hat{\mathbf{P}}_2$

Alternativ : Nach einer Projektion, werden Wiederholung der gleichen Projektion einen Vektor nicht ändern, d.h., $\hat{\mathbf{P}}_{\underline{i}} \cdot \hat{\mathbf{P}}_{\underline{i}} = \hat{\mathbf{P}}_i$

c) $\hat{\mathbf{Q}}\mathbf{f}_1 = 3\hat{\mathbf{P}}_1\mathbf{f}_1 - 2\hat{\mathbf{P}}_2\mathbf{f}_1 = 3\mathbf{f}_1$ und $\hat{\mathbf{Q}}\mathbf{f}_2 = 3\hat{\mathbf{P}}_1\mathbf{f}_2 - 2\hat{\mathbf{P}}_2\mathbf{f}_2 = -2\mathbf{f}_2$

$\mathbf{f}_1$ ist ein Eigenvektor mit dem Eigenwert 3 und $\mathbf{f}_2$ ist ein Eigenvektor mit dem Eigenwert -2

d) Aus (b), $\hat{\mathbf{Q}}^n = (3\hat{\mathbf{P}}_1 - 2\hat{\mathbf{P}}_2)^n = 3^n\hat{\mathbf{P}}_1 + (-2)^n\hat{\mathbf{P}}_2$

Matrixdarstellung in der Basis $\mathcal{B}$: $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \cdot 3^n + (-2)^n & 2 \cdot 3^n - 2(-2)^n \\ 2 \cdot 3^n - 2(-2)^n & 3^n + 4(-2)^n \end{pmatrix}$

e) $\hat{\mathbf{Q}}^n\mathbf{f}_1 = 3^n\hat{\mathbf{P}}_1\mathbf{f}_1 + (-2)^n\hat{\mathbf{P}}_2\mathbf{f}_1 = 3^n\mathbf{f}_1$ und $\hat{\mathbf{Q}}^n\mathbf{f}_2 = 3^n\hat{\mathbf{P}}_1\mathbf{f}_2 + (-2)^n\hat{\mathbf{P}}_2\mathbf{f}_2 = (-2)^n\mathbf{f}_2$

$\mathbf{f}_1$ ist ein Eigenvektor mit dem Eigenwert 3^n und $\mathbf{f}_2$ ist ein Eigenvektor mit dem Eigenwert $(-2)^n$

3 [35 Punkte] Tensor

a) $\hat{\mathbf{A}}\mathbf{e}_1 = (a^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_1 = a^{i1}\mathbf{e}_i = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \to a^{11} = -1$ und $a^{21} = 2$

$\hat{\mathbf{A}}\mathbf{e}_2 = (a^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_2 = a^{i2}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \to a^{12} = 1$ und $a^{22} = -1$

b) Wir notieren $\mathbf{e}_i = t^j{}_i\mathbf{f}_j$ wobei $s^i{}_j t^j{}_k = \delta^i_k$

In Matrixdarstellung $\begin{pmatrix} t^1{}_1 & t^1{}_2 \\ t^2{}_1 & t^2{}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^1{}_1 & s^1{}_2 \\ s^2{}_1 & s^2{}_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\hat{\mathbf{A}} = a^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = a^{ij}t^k{}_i\mathbf{f}_k \otimes t^\ell{}_j\mathbf{f}_\ell = t^k{}_i a^{ij} t^\ell{}_j \mathbf{f}_k \otimes \mathbf{f}_\ell \to a'^{\ell k} = t^k{}_i a^{ij} t^\ell{}_j$
In Matrixdarstellung bezüglich der Basis $\mathcal{F}$:
$$\begin{pmatrix} a'^{11} & a'^{12} \\ a'^{21} & a'^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^1{}_1 & t^1{}_2 \\ t^2{}_1 & t^2{}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^1{}_1 & t^1{}_2 \\ t^2{}_1 & t^2{}_2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
c) $g'_{11} = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1 = 10$, $g'_{12} = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 = 7$, $g'_{21} = \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_1 = 7$, $g'_{22} = \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2 = 5$
d) $\hat{\mathbf{A}} = a'^{ij}\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}_j = a'^{ij}\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^k g_{kj} \to a'^i{}_k = a'^{ij} g_{kj}$
$$\begin{pmatrix} a'^1{}_1 & a'^1{}_2 \\ a'^2{}_1 & a'^2{}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'^{11} & a'^{12} \\ a'^{21} & a'^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$$
e) $\mathbf{y} = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 \equiv y'^i\mathbf{f}_i$ mit $y'^1 = 1$ und $y'^2 = -1$.
$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{y} = a'^i{}_j \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^j y'^k \mathbf{f}_k = a'^i{}_j \mathbf{f}_i \otimes \delta^j_k y'^k = a'^i{}_j y'^j \mathbf{f}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'^1{}_1 & a'^1{}_2 \\ a'^2{}_1 & a'^2{}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'^1 \\ y'^2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \to \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{2}$$
Alternativ : $\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 = -\mathbf{e}_2 \to \mathbf{x} = \hat{\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2) = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \to \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{2}$