Name: Tutoriumsgruppe:
Matr. Nr.: Hörsaal: Sitzplatznummer:
Anzahl der abgegebenen Blätter (inkl. Deckblatt):

Mathematische Methoden der Theoretischen Physik (UE, 135.044)

2. Test, 20. 1. 2023, 2022/23W

1 (35 Punkte) Frobenius-Methode

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) - 2x\frac{d}{dx}y(x) + 2ky(x) = 0$$

$(-\infty < x < \infty)$.
a) Verwenden Sie den Ansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma}$ $(a_0 \neq 0)$ und bestimmen Sie die charakteristischen Exponenten σ_1 und σ_2 $(\sigma_1 > \sigma_2)$ der Differentialgleichung.
b) Zeigen Sie, dass $a_1 = 0$ für $\sigma = \sigma_1$ gilt.
c) Schreiben Sie die Rekursionsgleichung der Folge a_n an.
d) Schreiben Sie eine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung für $\sigma = \sigma_1$ und $k = 3$ an.

BITTE WENDEN

2 (40 Punkte) Greensche Funktion

a) Berechnen Sie für $\omega_0, \gamma, t, t' \in \mathbb{R}$ das folgende Integral und zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega - \omega_0 - i\gamma} d\omega = 2\pi i e^{(i\omega_0-\gamma)(t-t')} \left(H(\gamma)H(t-t') - H(-\gamma)H(t'-t)\right) .$$

Erklären Sie kurz, welcher Integrationspfad verwendet wird und die Begründung für den ausgewählten Pfad (kein detaillierter Beweis ist nötig).

b) Die Funktion $\psi_\omega(t) = e^{i\omega t}$ erfüllt die Eigenwertgleichung $\mathcal{L}_t\psi_\omega(t) = \lambda(\omega)\psi_\omega(t)$ mit dem Eigenwert $\lambda(\omega) = -(\omega-1-2i)(\omega+1-2i)$. Zeigen Sie, dass die Greensche Funktion

$$G(t,t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda(\omega)}\psi_\omega(t)\psi_\omega^*(t')d\omega$$

die Gleichung $\mathcal{L}_t G(t,t') = \delta(t-t')$ erfüllt (Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iat}dt = 2\pi\delta(a)$).

c) Berechnen Sie mithilfe des Ergebnisses aus a) das Integral aus b) und schreiben Sie eine Greensche Funktion $G(t,t')$ des Differentialoperators $\mathcal{L}_t$ an.

d) Lösen Sie die Differentialgleichung $\mathcal{L}_t x(t) = \delta(t-T)$ mit $T > 0$ und den Randbedingungen $x(0) = 0$ und $x'(0) = 0$.

3 (25 Punkte)

a) Betrachten Sie die Eigenwertgleichung $\mathcal{L}_x R_k(x) = \lambda_k R_k(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ mit dem Eigenwerte λ_k und dem Differentialoperator

$$\mathcal{L}_x = \frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} .$$

Finden Sie eine Gewichtsfunktion $w(x)$ (außer $w(x) = 0$), sodass die Eigenfunktionen die Orthogonalitätseigenschaft ($\int_{-\infty}^{\infty} R_n(x)R_m(x)w(x)dx = 0$ für $n \neq m$) erfüllen.

b) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(x)V(x)W(x)dx$$

für $U(x) = 1$, $V(x) = 4x^2 - 2$ und $W(x) = e^{-x^2}$.
Hinweis: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ und $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$

c) Betrachten Sie eine lokale Transformation $dx^i\mathbf{e}_i = dx'^i\mathbf{f}_i$ zwischen den kartesischen Koordinaten $(x^1, x^2) = (x, y)$ und den Koordinaten $(x'^1, x'^2) = (u, v)$, wobei die Koordinatentransformation durch $(x, y) = ((u^2 - v^2)/2, uv)$ definiert. Berechnen Sie die Divergenz $\nabla \cdot \mathbf{w}$ des ortsabhängigen Vektorfelds $\mathbf{w} = (u/2)\mathbf{f}_1 + (v/2)\mathbf{f}_2$.