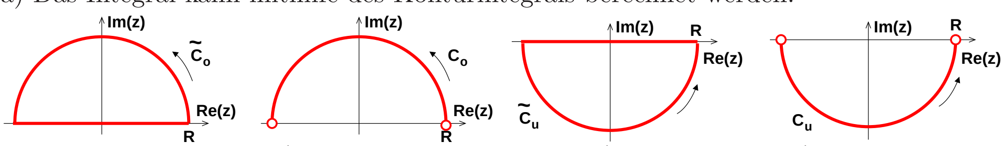
2. Test - Lösungen **20.1.2023**

1 [35 Punkte] Frobenius-Methode

a) $y''(x) - 2xy'(x) + 2ky(x) = 0$
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\sigma)(n+\sigma-1)x^{n+\sigma-2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\sigma-k)x^{n+\sigma} = 0$
$n \to n+2$ im 1.Term
$\sum_{n=-2}^{\infty} a_{n+2}(n+\sigma+2)(n+\sigma+1)x^{n+\sigma} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\sigma-k)x^{n+\sigma} = 0$
Koeffizientenvergleich $(x^{\sigma-2}) : a_0\sigma(\sigma-1) = 0$. Da $a_0 \neq 0$, $\sigma_1 = 1$ und $\sigma_2 = 0$
b) Koeffizientenvergleich $(x^{\sigma-1}) : a_1(\sigma+1)\sigma = 0$. Wenn $\sigma = \sigma_1 = 1$, gilt $2a_1 = 0$, d.h. $a_1 = 0$.
c) Koeffizientenvergleich $(x^{n+\sigma}) : a_{n+2}(n+\sigma+2)(n+\sigma+1) - 2a_n(n+\sigma-k) = 0 \to a_{n+2} = \frac{2(n+\sigma-k)}{(n+\sigma+2)(n+\sigma+1)}a_n$
d) Für $\sigma = 1$, gilt $a_1 = 0$. Aus der Rekursionsgleichung gilt $a_n = 0$ für ungerades n.
Für $k = 3$, $a_{n+2} = \frac{2(n-2)}{(n+3)(n+2)}a_n$. $a_2 = -\frac{2}{3}a_0$ und $a_4 = 0$. d.h. $a_n = 0$ für gerades $n > 2$.
$y(x) = a_0\left(x - \frac{2}{3}x^3\right)$

2 [40 Punkte] Greensche Funktion

a) Das Integral kann mithilfe des Konturintegrals berechnet werden.



Wenn $t > t'$, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-\omega_0-i\gamma}d\omega = \lim_{R\to\infty}\left[\oint_{\tilde{C}_o} \frac{e^{iz(t-t')}}{z-\omega_0-i\gamma}dz - \int_{C_o} \frac{e^{iz(t-t')}}{z-\omega_0-i\gamma}dz\right]$
Begründung : Das erste Integral kann mithilfe des Residuensatzes gerechnet werden und für das zweite Integral gilt $|e^{iz(t-t')}| = |e^{iRe^{i\theta}(t-t')}|e^{-R\sin\theta(t-t')}$. Da $\sin\theta > 0$ entlang C_o, gilt $|e^{iz(t-t')}| \to 0$ im Limes $R \to \infty$ und verschwindet das zweite Integral.
Wenn $t < t'$, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-\omega_0-i\gamma}d\omega = \lim_{R\to\infty}\left[-\oint_{\tilde{C}_u} \frac{e^{iz(t-t')}}{z-\omega_0-i\gamma}dz + \int_{C_u} \frac{e^{iz(t-t')}}{z-\omega_0-i\gamma}dz\right]$.
Ähnlich wie den Fall $t > t'$, verschwindet das zweite Integral im Limes $R \to \infty$.
Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-\omega_0-i\gamma}d\omega = H(t-t')\lim_{R\to\infty}\oint_{\tilde{C}_o} \frac{e^{iz(t-t')}}{z-\omega_0-i\gamma}dz - H(t'-t)\lim_{R\to\infty}\oint_{\tilde{C}_u} \frac{e^{iz(t-t')}}{z-\omega_0-i\gamma}dz$ kann mithilfe des Residuensatzes berechnet werden.
Wenn $\gamma > 0$, liegt die Polstelle $z = \omega_0 + i\gamma$ in der oberen Halbebene und wenn $\gamma < 0$ in der unteren Halbebene.
$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-\omega_0-i\gamma}d\omega = H(t-t')H(\gamma)2\pi i e^{(i\omega_0-\gamma)(t-t')} - H(t'-t)H(-\gamma)2\pi i e^{(i\omega_0-\gamma)(t-t')}$
$= 2\pi i e^{(i\omega_0-\gamma)(t-t')}(H(t-t')H(\gamma) - H(t'-t)H(-\gamma))$
b) $\mathcal{L}_t G(t,t') = \mathcal{L}_t\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\lambda(\omega)}\psi_\omega(t)\psi_\omega^*(t')\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\lambda(\omega)}\left(\mathcal{L}_t\psi_\omega(t)\right)\psi_\omega^*(t')$
$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \psi_\omega(t)\psi_\omega^*(t') = \delta(t-t')$
c)
$G(t,t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\lambda(\omega)}\psi_\omega(t)\psi_\omega^*(t') = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega(t-t')}}{(\omega-1-2i)(\omega+1-2i)} = -\frac{1}{4\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-1-2i} - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega+1-2i}\right]$
$\gamma = 2$ und $\omega_0 = \pm 1$ in b
$G(t,t') = -\frac{i}{2}H(t-t')(e^{(-2+i)(t-t')} - e^{(-2-i)(t-t')}) = H(t-t')e^{-2(t-t')}\sin(t-t')$
d) $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,t')\delta(t'-T)dt' = H(t-T)e^{-2(t-T)}\sin(t-T)$
$x'(t) = \delta(t-T)e^{-2(t-T)}\sin(t-T) - 2x(t) + H(t-T)e^{-2(t-T)}\cos(t-T) = -2x(t) + H(t-T)e^{-2(t-T)}\cos(t-T)$
Da $T > 0$, $x(0) = 0$ und $x'(0) = 0$ (Randbedingungen erfüllt).

3 [25 Punkte]

a) Die Sturm-Liouville'schen Gestalt:
$\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] - \lambda_k w(x)\right) R_k(x) = 0 \rightarrow p(x)R_k''(x) + p'(x)R_k'(x) + \lambda_k w(x)R_k(x) = 0$
$p'(x)/p(x) = -2x \rightarrow p(x) = e^{-x^2}$
$w(x)/p(x) = 1 \rightarrow \rho(x) = p(x) = e^{-x^2}$
b) $\int_{-\infty}^{\infty} U(x)V(x)W(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}(4x^2 - 2)e^{-x^2}dx = 2\int_0^{\infty}(4x^2 - 2)e^{-x^2}dx = 2\int_0^{\infty}(4t - 2)e^{-t}\frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \int_0^{\infty}(4t^{1/2} - 2t^{-1/2})e^{-t}dt = 4\Gamma(3/2) - 2\Gamma(1/2) = 4(1/2)\Gamma(1/2) - 2\Gamma(1/2) = 0$
Anmerkung : $U(x)$ und $V(x)$ sind die Eigenfunktionen der Differentialoperators aus a).
c) lokale Transformation : $dx^i\mathbf{e}_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}dx'^j\mathbf{e}_i \equiv dx'^j\mathbf{f}_j$ mit $\mathbf{f}_j = \mathbf{e}_i\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = \mathbf{e}_i\partial_j' x^i$
$\begin{pmatrix} s^1{}_1 & s^1{}_2 \\ s^2{}_1 & s^2{}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1' x^1 & \partial_2' x^1 \\ \partial_1' x^2 & \partial_2' x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$
$\mathbf{w} = (u/2)\mathbf{f}_1 + (v/2)\mathbf{f}_2 = (u/2)(u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2) + (v/2)(-v\mathbf{e}_1 + u\mathbf{e}_2) = (u^2 - v^2)/2\mathbf{e}_1 + uv\mathbf{e}_2 = x^i\mathbf{e}_i$
$\nabla\cdot\mathbf{w} = \mathbf{e}^j\partial_j x^i\mathbf{e}_i = \delta^i_j\delta^j_i = \delta^i_i = 2$
Alternative: $\mathbf{f}^i\partial_i' = \mathbf{e}^j t^i{}_j\partial_i' = \mathbf{e}^j\partial_j \rightarrow \partial_j = t^i{}_j\partial_i'$ mit $\begin{pmatrix} t^1{}_1 & t^1{}_2 \\ t^2{}_1 & t^2{}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^1{}_1 & s^1{}_2 \\ s^2{}_1 & s^2{}_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{u^2+v^2}\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$
d.h., $\partial_x = \frac{1}{u^2+v^2}(u\partial_u - v\partial_v)$ und $\partial_y = \frac{1}{u^2+v^2}(v\partial_u + u\partial_v)$
$\nabla\cdot\mathbf{w} = \partial_x(u^2 - v^2)/2 + \partial_v(uv) = \frac{1}{u^2+v^2}(u^2 + v^2) + \frac{1}{u^2+v^2}(u^2 + v^2) = 2$
Anmerkung : Die Rechnung in den neuen Koordinaten:
$\mathbf{w} = (u/2)\mathbf{f}_1 + (v/2)\mathbf{f}_2 = \frac{1}{2}x'^i\mathbf{f}_i \rightarrow \nabla\cdot\mathbf{w} = \nabla\cdot\frac{1}{2}x'^i\mathbf{f}_i = \frac{1}{2}(\nabla x'^i)\cdot\mathbf{f}_i + \frac{1}{2}x'^i\nabla\cdot\mathbf{f}_i$
Die Ableitung der Basisvektoren ist erforderlich:
Mit $V = \det\mathbf{S} = u^2 + v^2$ (siehe Bsp.6.2), $\nabla\cdot\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\partial_j' V x'^i)(\mathbf{f}^j\cdot(1/V)\mathbf{f}_i) + \frac{1}{2}Vx'^i\mathbf{f}^j\cdot(\partial_j'(1/V)\mathbf{f}_i)$
$= \frac{1}{2}\left[(\partial_j' V)x'^i + V\delta^i_j\right](1/V)x\delta^j_i = \frac{1}{2}\left[V^{-1}(\partial_i' V)x'^i + \delta^i_i\right] = \frac{1}{2}\left[2 + \delta^i_i\right] = 2$