10. Tutorium **für 13.1.2023**

10.1 Gamma- und Beta-Funktionen

a) Lösen Sie die Rekursionsgleichung für eine Folge a_n

$$a_n = -\frac{2n-1}{2n} a_{n-1}$$

mit der Randbedingung $a_1 = -1/2$ und schreiben Sie das Endergebnis mithilfe der Doppelfakultät an.
b) Schreiben Sie das Ergebnis aus a) mithilfe der Gamma-Funktion (ohne Doppelfakultät) um.
c) Schreiben Sie das Integral $I_n = \int_0^\pi \sin^n \theta d\theta$ mithilfe der Beta-Funktion an. Lösen Sie die Rekursionsgleichung $V_n = I_n V_{n-1}$ für eine Folge V_n (n: gerade Ganzzahl) mit der Randbedingung $V_2 = \pi$.

10.2 Frobenius-Methode I

a) Verwenden Sie den Ansatz $P(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+\sigma}$ ($a_0 \neq 0$) und bestimmen Sie die charakteristischen Exponenten σ der Differentialgleichung

$$P''(r) + \frac{1}{r} P'(r) + \left(1 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) P(r) = 0\,.$$

b) Schreiben Sie die Rekursionsgleichung der Folge a_n an.
c) Lösen Sie die Differentialgleichung für $\nu = 1/2$ und schreiben Sie die allgemeine Lösung an.

10.3 Frobenius-Methode II

a) Verwenden Sie den Ansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma}$ $(a_0 \neq 0)$ und bestimmen Sie die charakteristischen Exponenten σ_1 und σ_2 $(\sigma_1 > \sigma_2)$ der Differentialgleichung $(x > 0)$

$$\left(\frac{d}{dx}\left[x^{k+1}e^{-x}\frac{d}{dx}\right] + \nu x^k e^{-x}\right) y(x) = 0$$

(k und ν sind positive Ganzzahlen).

b) Schreiben Sie die Rekursionsgleichung der Folge a_n für $\sigma = \sigma_1$ an und zeigen Sie, dass $a_n = 0$ für $n > \nu$.

c) Schreiben Sie eine Lösung $y_1(x)$ der Differentialgleichung für $\nu = 1$.

d) Schreiben Sie eine Lösung $y_2(x)$ der Differentialgleichung für $\nu = 2$.

e) $y_m(x)$ sei eine Lösung der Differentialgleichung aus a). $\{y_1(x), y_2(x), y_3(x), \cdots\}$ bildet eine Orthogonalbasis in einem Funktionenraum wenn das Skalarprodukt mit der Gewichtsfunktion $w(x)$ definiert ist, d.h. $\int_0^{\infty} y_m(x) y_\ell(x) w(x) dx = 0$ für $m \neq \ell$. Finden Sie die Gewichtsfunktion $w(x)$ und überprüfen Sie, dass die Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ aus c) und d) orthogonal miteinander sind.

Ankreuzbar: 1a-c, 2ab, 2c, 3ab, 3c-e

Ein kurzer Ausblick auf zukünftige Semester: In allen Fächern der Physik werden viele Phänomene von Differentialgleichungen beschrieben. Die Eigenschaften der Differentialgleichungen werden im Rahmen des Sturm-Liouville-Problems, und des Separationsansatzes analysiert und die Greensche Funktion und Frobenius-Methode sind praktische Methoden, um die Lösungen zu finden. Das Eigenwertproblem und das Spektraltheorem tauchen oft insbesondere in Quantentheorie (5. Sem) und Statistischer Physik (6. Sem) auf. Legendre-Polynome, Delta Distribution, Heaviside Funktion und andere spezielle Funktionen werden in Elektrodynamik (4. Semester) und Quantentheorie wiederkehren. Sie sind wichtige Grundlagen auch für numerische Rechnungen (wie z.B Gauß-Quadratur). Ko- und kontravariante Schreibweise werden in Elektrodynamik I & II für die spezielle Relativitätstheorie gebraucht. Die duale Basis erscheint in Form des reziproken Gitters in der Festkörperphysik (6. Sem). Die Gamma-Funktion wird in Statistischer Physik (6. Sem) eine wichtige Rolle spielen. Somit sollten die "Mathematischen Methoden" eine wichtige Grundlage für künftige theoretische Vorlesungen bieten.