10. Tutorium - Lösungen **13.1.2023**

10.1 Gamma- und Beta-Funktionen

a) $a_n = -\frac{2n-1}{2n} a_{n-1} = \frac{(2n-1)\cdot(2n-3)}{2n\cdot(2n-2)} a_{n-2} = -\frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot(2n-5)}{2n\cdot(2n-2)\cdot(2n-4)} a_{n-3} = \cdots$
$= (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot(2n-5)\cdots 3}{2n\cdot(2n-2)\cdot(2n-4)\cdots 4} a_1 = (-1)^n \frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot(2n-5)\cdots 3\cdot 1}{2n\cdot(2n-2)\cdot(2n-4)\cdots 4\cdot 2} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$
b) $a_n = (-1)^n \frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot(2n-5)\cdots 3\cdot 1}{2n\cdot(2n-2)\cdot(2n-4)\cdots 4\cdot 2} = (-1)^n \frac{2n\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)\cdot(2n-3)\cdot(2n-4)\cdot(2n-5)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(2n\cdot(2n-2)\cdot(2n-4)\cdots 4\cdot 2)^2}$
$= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1)^2} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = (-1)^n \frac{\Gamma(2n+1)}{2^{2n}(\Gamma(n+1))^2}$
Anmerkung: Die Folge a_n ist die Entwicklungskoeffiziente der Taylor-Reihe $(1+x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(a_0 = 1)$
c) Koordinatentransformation: $t = \sin^2\theta \to dt = 2\sin\theta\cos\theta d\theta = \pm 2\sqrt{t(1-t)}d\theta$
$I_n = \int_0^{\pi} \sin^n\theta d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \sin^n\theta d\theta = \int_0^1 t^{n/2}/\sqrt{t(1-t)}dt = \int_0^1 t^{n/2-1/2}(1-t)^{-1/2}dt = B((n+1)/2, 1/2)$
Rekursionsgleichung:
$V_n = I_n V_{n-1} = B((n+1)/2, 1/2)V_{n-1} = \frac{\Gamma((n+1)/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma((n+2)/2)} V_{n-1} = \frac{\Gamma((n+1)/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma((n+2)/2)} \frac{\Gamma(n/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma((n+1)/2)} V_{n-2} = \frac{\Gamma(n/2)(\Gamma(1/2))^2}{\Gamma((n+2)/2)} V_{n-2}$
Für gerade $n = 2m$
$V_{2m} = (\Gamma(1/2))^2 \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m+1)} V_{2(m-1)} = \pi \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m+1)} V_{2(m-1)} = \pi^2 \frac{\Gamma(m)\Gamma(m-1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(m)} V_{2(m-2)} = \pi^2 \frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma(m+1)} V_{2(m-2)}$
$= \pi^3 \frac{\Gamma(m-2)}{\Gamma(m+1)} V_{2(m-3)} = \cdots = \pi^{m-1} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(m+1)} V_2 = \pi^m \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(m+1)}$
$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!}$
Anmerkung: $V_n R^n$ ist das Volumen den n-dimensionalen Kugel (gilt auch für ungerade n (nachrechnen)) (siehe auch Bsp.7.3).

10.2 Frobenius-Methode I

a) 1.Ableitung: $P'(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\sigma)r^{n+\sigma-1}$
2.Ableitung: $P'(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\sigma)(n+\sigma-1)r^{n+\sigma-2}$
Differentialgleichung (siehe Bsp.9.3):
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\sigma)(n+\sigma-1)r^{n+\sigma-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\sigma)r^{n+\sigma-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+\sigma} - \sum_{n=0}^{\infty} \nu^2 a_n r^{n+\sigma-2} = 0$
Potenz von r anpassen:
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\sigma)(n+\sigma-1)r^{n+\sigma-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\sigma)r^{n+\sigma-2} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} r^{n+\sigma-2} - \sum_{n=0}^{\infty} \nu^2 a_n r^{n+\sigma-2} = 0$
Der 3.Term hat die Summe nur für $n \geq 2$
$\left[a_0\sigma(\sigma-1) + a_0\sigma - \nu^2 a_0\right] r^{\sigma-2} + \left[a_1(\sigma+1)\sigma + a_1(\sigma+1) - \nu^2 a_1\right] r^{\sigma-1}$
$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[a_n(n+\sigma)(n+\sigma-1) + a_n(n+\sigma) + a_{n-2} - \nu^2 a_n\right] r^{n+\sigma-2} = 0$
Koeffizientenvergleich ($r^{\sigma-2}$-Term):
$a_0\sigma(\sigma-1) + a_0\sigma - \nu^2 a_0 = a_0(\sigma^2 - \nu^2) = 0$ Da $a_0 \neq 0$, gilt $\sigma = \pm\nu$
Anmerkung: Koeffizientenvergleich für $r^{\sigma-1}$-Term:
$a_1(\sigma+1)\sigma + a_1(\sigma+1) - \nu^2 a_1 = a_1[(\sigma+1)^2 - \nu^2] = 0 \to a_1 = 0$ oder $\sigma = \pm\nu - 1$
Wenn $\nu = \pm 1/2$ und $\sigma = -1/2$, werden die beiden Bedingungen $\sigma = \pm\nu$ und $\sigma = \mp\nu - 1$ erfüllt und a_1 muss nicht gleich null sein. Sonst gilt $a_1 = 0$
b) Koeffizientenvergleich ($r^{n+\sigma-2}$-Term):
$a_n(n+\sigma)(n+\sigma-1) + a_n(n+\sigma) + a_{n-2} - \nu^2 a_n = a_n[(n+\sigma)^2 - \nu^2] + a_{n-2} = 0$
$a_n = -\frac{1}{(n+\sigma)^2-\nu^2} a_{n-2} = -\frac{1}{(n+\sigma+\nu)(n+\sigma-\nu)} a_{n-2}$
(oder wenn $\sigma = \nu$, $a_n = -\frac{1}{n(n+2\nu)} a_{n-2}$ und wenn $\sigma = -\nu$, $a_n = -\frac{1}{n(n-2\nu)} a_{n-2}$.)
c) Wenn $\nu = 1/2$, gilt $\sigma = \pm 1/2$.
Wenn $\sigma = 1/2$, $a_1 = 0$.
Aus der Rekursionsgleichung $a_3 = -\frac{1}{(n+\sigma+\nu)(n+\sigma-\nu)} a_1 = 0$, $a_5 = -\frac{1}{(n+\sigma+\nu)(n+\sigma-\nu)} a_3 = 0, \cdots,$
d.h. $a_n = 0$ für ungerade n.
Für gerade $n = 2m$
$a_{2m} = -\frac{1}{(2m+1)2m} a_{2(m-1)} = \frac{1}{(2m+1)2m(2m-1)(2m-2)} a_{2(m-2)} = -\frac{1}{(2m+1)2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)(2m-4)} a_{2(m-3)}$
$= \cdots = (-1)^m \frac{1}{(2m+1)2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)(2m-4)\cdots 3\cdot 2} a_0 = (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!} a_0$
Lösung: $P(r) = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!} r^{2m+1/2} = a_0 r^{-1/2} \sin r$

Wenn $\sigma = -1/2$, kann a_1 nicht gleich null sein.
Für ungerade $n = 2m + 1$
$a_{2m+1} = -\frac{1}{(2m+1)2m} a_{2m-1} \to a_{2m+1} = (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!} a_1$
Lösung: $P(r) = a_1 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!} r^{2m+1-1/2} = a_1 r^{-1/2} \sin r$
Für gerade $n = 2m$
$a_{2m} = -\frac{1}{2m(2m-1)} a_{2(m-1)} \to a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{(2m)!} a_0$
Lösung: $P(r) = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m)!} r^{2m-1/2} = a_0 r^{-1/2} \cos r$
Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung: $P(r) = c_1 r^{-1/2} \cos r + c_2 r^{-1/2} \sin r$

10.3 Frobenius-Methode II

Differentialgleichung:
$\left(\frac{d}{dx}\left[x^{k+1}e^{-x}\frac{d}{dx}\right] + \nu x^k e^{-x}\right) y(x) = x^{k+1}e^{-x}y''(x) + [k+1-x]x^k e^{-x}y'(x) + \nu x^k e^{-x} y(x) = 0$
$\to xy''(x) + [k+1-x]y'(x) + \nu y(x) = 0$
Ansatz : $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma}$
Differentialgleichung:
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\sigma)(n+\sigma-1)x^{n+\sigma-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(k+1)(n+\sigma)x^{n+\sigma-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\sigma)x^{n+\sigma} + \nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma} = 0$
$\sum_{n=-1}^{\infty} a_{n+1}(n+1+\sigma)(n+\sigma)x^{n+\sigma} + \sum_{n=-1}^{\infty} a_{n+1}(k+1)(n+\sigma+1)x^{n+\sigma} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\sigma)x^{n+\sigma} + \nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma} = 0$
$a_0[\sigma(\sigma-1) + (k+1)\sigma]x^{\sigma-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1}[(n+1+\sigma)(n+\sigma) + (k+1)(n+\sigma+1)] + a_n[-(n+\sigma)+\nu])\, x^{n+\sigma} = 0$
$a_0\sigma(\sigma+k)x^{\sigma-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1}(n+\sigma+1)(n+\sigma+k+1) + a_n(-n-\sigma+\nu))\, x^{n+\sigma} = 0$
Koeffizientenvergleich ($x^{\sigma-1}$-Term):
$\sigma(\sigma+k) = 0 \to \sigma_1 = 0$ und $\sigma_2 = -k$
b)Koeffizientenvergleich ($x^{n+\sigma}$-Term):
$a_{n+1}(n+\sigma+1)(n+\sigma+k+1) + a_n(-n-\sigma+\nu) = 0$
$a_{n+1} = a_n \frac{n+\sigma-\nu}{(n+\sigma+1)(n+\sigma+k+1)}$
Wenn $\sigma = 0$, gilt $a_{n+1} = a_n \frac{n-\nu}{(n+1)(n+k+1)}$.
$\to a_{\nu+1} = 0$. Wenn $n > \nu + 1$, gilt $a_n = 0$.
c) Wenn $\nu = 1$, gilt $a_{n+1} = a_n \frac{n-1}{(n+1)(n+k+1)}$
$a_1 = -\frac{1}{k+1} a_0$, $a_n = 0$ $(n \geq 2)$
$y(x) = a_0 \left(1 - \frac{1}{k+1} x\right)$
d) Wenn $\nu = 2$, gilt $a_{n+1} = a_n \frac{n-2}{(n+1)(n+k+1)}$
$a_1 = -\frac{2}{k+1} a_0$, $a_2 = -\frac{1}{2(k+2)} a_1 = \frac{1}{(k+2)(k+1)} a_0$, $a_n = 0$ $(n \geq 3)$
$y(x) = a_0 \left(1 - \frac{2}{k+1} x + \frac{1}{(k+2)(k+1)} x^2\right)$
e) Die Differentialgleichung $\left(\frac{d}{dx}\left[x^{k+1}e^{-x}\frac{d}{dx}\right] + \nu x^k e^{-x}\right) y(x) = 0$ ist in der Sturm-Liouville'sche Gestalt. Wenn die Differentialgleichung als eine Eigenwertgleichung mit dem Eigenwert ν betrachtet, wird die Gewichtsfunktion durch $w(x) = x^k e^{-x}$ gegeben.
Mithilfe des Integrals $I_n = \int_0^{\infty} x^n w(x) dx = \Gamma(n+k+1) = (n+k)!$,
Die Orthogonalität der Eigenfunktionen wird gezeigt:
$a_0^{-2} \int_0^{\infty} y_1(x) y_2(x) w(x) dx = I_0 - \frac{1}{k+1} I_1 - \frac{2}{k+1} I_1 + \frac{1}{(k+1)(k+2)} I_2 + \frac{2}{(k+1)^2} I_2 - \frac{1}{(k+1)^2(k+2)} I_3$
$= k! - \frac{(k+1)!}{k+1} - \frac{2(k+1)!}{k+1} + \frac{(k+2)!}{(k+1)(k+2)} + \frac{2(k+2)!}{(k+1)^2} - \frac{(k+3)!}{(k+1)^2(k+2)} = k! - k! - 2(k!) + k! + \frac{2(k+2)}{k+1} k! - \frac{k+3}{k+1} k! = 0$