1. Tutorium **für 14.10.2022**

Informationen zu den Übungen

- Die Beispiele sind online in TUWEL bis Freitag, 00:00Uhr, anzukreuzen! Eine spätere Änderung der Kreuze ist nicht mehr möglich.
- Die Anzahl der angekreuzten Beispiele geht in die Endnote ein. Mindestens 50% aller Beispiele müssen angekreuzt werden, aber je mehr, desto besser. Die Tafelleistung wird mit „OK“ oder „nicht vorbereitet“ bewertet. In letzterem Fall werden alle Kreuze des Tages gestrichen. Zum Bestehen der Übung ist mindestens eine positive Bewertung notwendig. Sehen Sie die Übung als gute Gelegenheit, Unklarheiten bei den Beispielen zu klären. Nützen Sie die Gelegenheit, um Fragen zu stellen!
- In dieser Übung werden mathematische Grundlagen vermittelt, die später vor allem in „Elektrodynamik“ und „Quantentheorie“ zur Anwendung kommen, aber auch in anderen Vorlesungen und Übungen nützlich sein werden. Es zahlt sich also aus, von Anfang an eifrig mitzuarbeiten! :)

1.1 Indexschreibweise und Matrixschreibweise

Gegeben seien eine 3×3 Matrix $\mathbf{A}$ und ein Vektor (oder eine 3×1 Matrix) $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Zum Beispiel wird ein Matrix-Vektor-Produkt mit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$ in Matrixschreibweise und mit $\sum_{j=1,3} a_{ij} v_j$ in Indexschreibweise dargestellt.
a) Schreiben Sie in Indexschreibweise das Betragsquadrat $|\mathbf{v}|^2$ des Vektors an. Nehmen Sie an, dass $(v_1, v_2, v_3) = (x, y, z)$ die reellen kartesischen Koordinaten sind.
b) Schreiben Sie das Produkt $\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$ in Indexschreibweise an. Zeigen Sie, dass für $a_{ij} = p_i q_j$ das Produkt mit $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})$ dargestellt wird. (p_i und q_i sind die kartesischen Koordinaten der Vektoren, $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$.)
c) Schreiben Sie den Ausdruck $\sum_{i,j=1}^{3} t_{ik} a_{ij} t_{j\ell}$ in Matrixschreibweise. (t_{ij} sind die Elemente der Matrix $\mathbf{T}$.)
d) Die Taylorreihe einer analytischen Funktion $f(x_1, x_2, x_3)$ mit Entwicklungsstelle $\mathbf{x} = 0$ wird in Indexschreibweise durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(0,0,0) + \sum_{i=1}^{3} a_i x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} b_{ij} x_i x_j + \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^{3} c_{ijk} x_i x_j x_k + \cdots$$

geschrieben. Schreiben Sie die Koeffizienten a_i, b_{ij}, c_{ijk} als Ableitungen von f an.

1.2 Lineare Unabhängigkeit

a) Gegeben seien Polynome

$$p_1(x) = x^2 + x + 1, \quad p_2(x) = 2x^2 - x + 1, \quad p_3(x) = x^2 + x\,.$$

Finden Sie eine Menge der Koeffizienten a_i, die die Gleichung $f(x) = \sum_{i=1}^{3} a_i p_i(x)$ mit $f(x) = x^2 - 2x + 3$ erfüllen.
b) Überprüfen Sie, ob die Menge der Polynome aus a), $\mathcal{P} = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$, linear unabhängig ist.
c) Gegeben seien Polynome

$$q_1(x) = 2x^2 - x + 1 \quad q_2(x) = -x^2 + x + 1, \quad q_3(x) = 3x^2 - 2x\,.$$

Finden Sie eine Menge der Koeffizienten b_i, die die Gleichung $g(x) = \sum_{i=1}^{3} b_i q_i(x)$ mit $g(x) = 5x^2 - 3x + 1$ erfüllen.
d) Überprüfen Sie, ob die Menge der Polynome aus c), $\mathcal{Q} = \{q_1(x), q_2(x), q_3(x)\}$, linear unabhängig ist.

1.3 Differentialoperator in Matrixschreibweise

Gegeben sei ein Polynom $\psi(x) = \sum_{i=1}^{3} a_i p_i(x)$ ($p_i(x)$: Polynome aus Bsp.1.2a). Die erste Ableitung lässt sich im Vektorraum $\mathcal{V}$ als $\frac{d}{dx}\psi(x) = \sum_{i=1}^{3} b_i p_i(x)$ darstellen. Schreiben Sie die Transformation der Koeffizienten in Matrix-Vektorform, d.h. $\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{a}$, wobei $\mathbf{T}$ eine 3×3 Matrix ist.

Ankreuzbar: 1ab, 1cd, 2ab, 2cd, 3