1. Tutorium - Lösungen **14.10.2022**

1.1 Indexschreibweise und Matrixschreibweise

a)$|\mathbf{v}|^2 = \sum_{i=1}^3 v_i v_i$
b) $\mathbf{w} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \sum_{j=1}^3 a_{ij} v_j \equiv w_i$
$\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{w} = \sum_{i=1}^3 v_i w_i = \sum_{i=1}^3 v_i \left(\sum_{j=1}^3 a_{ij} v_j\right) = \sum_{i,j=1}^3 v_i a_{ij} v_j$
Wenn $a_{ij} = p_i q_j$, $\sum_{i,j=1}^3 v_i a_{ij} v_j = \sum_{i,j=1}^3 v_i p_i q_j v_j = \left(\sum_{i=1}^3 v_i p_i\right)\left(\sum_{j=1}^3 q_j v_j\right) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})$
c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{P}$
Z.B. $p_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{pmatrix} = a_{11}t_{11} + a_{12}t_{21} + a_{13}t_{31} = \sum_{j=1}^3 a_{1j} t_{j1}$
Im Allgemeinen, $p_{i\ell} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{1\ell} \\ t_{2\ell} \\ t_{3\ell} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^3 a_{ij} t_{j\ell}$
In gleicher Weise $\mathbf{B} \cdot \mathbf{P} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$
$q_{k\ell} = \sum_{i=1}^3 b_{ki} p_{i\ell} = \sum_{i,j=1}^3 b_{ki} a_{ij} t_{j\ell}$
Wenn $q_{k\ell} = \sum_{i,j=1}^3 t_{ik} a_{ij} t_{j\ell}$, gilt $b_{ki} = t_{ik}$
d.h., $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{T}^T$
$\sum_{i,j=1}^3 t_{ik} a_{ij} t_{j\ell} \to \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{P} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$
(In der Angabe ist die Dimension der Matrix $\mathbf{T}$ nicht gegeben und $\mathbf{T}$ kann eine $3 \times n$ Matrix sein.)
Alternative : $\sum_{i,j=1}^3 t_{ik} a_{ij} t_{j\ell} \to \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{T}$
(Überpruüfen Sie, ob dieser Ausdruck auch eine Darstellung von $\sum_{i,j=1}^3 t_{ik} a_{ij} t_{j\ell}$ in Matrixschreibweise ist.)
d)
$f(x_1, x_2, x_3) = f(0,0,0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_1=x_2=x_3=0} x_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x_1=x_2=x_3=0} x_2 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_3}\right|_{x_1=x_2=x_3=0} x_3$
$+\frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right|_{x_1=x_2=x_3=0} x_1^2 + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{x_1=x_2=x_3=0} x_1 x_2 + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\right|_{x_1=x_2=x_3=0} x_2 x_1 + \cdots$
$+\frac{1}{3!} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^3}\right|_{x_1=x_2=x_3=0} x_1^3 + \frac{1}{3!} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}\right|_{x_1=x_2=x_3=0} x_1 x_2 x_3 + \cdots$
$= f(0,0,0) + \sum_{i=1}^3 \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_1=x_2=x_3=0} x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{x_1=x_2=x_3=0} x_i x_j + \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^3 \left.\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right|_{x_1=x_2=x_3=0} x_i x_j x_k + \cdots$
$a_i = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_1=x_2=x_3=0}$, $b_{ij} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{x_1=x_2=x_3=0}$ und $c_{ijk} = \left.\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right|_{x_1=x_2=x_3=0}$

1.2 Lineare Unabhängigkeit und Skalarprodukt

a) $\sum_{i=1}^3 a_i p_i(x) = f(x)$
$\to (a_1 + 2a_2 + a_3)x^2 + (a_1 - a_2 + a_3)x + a_1 + a_2 = x^2 - 2x + 3$
Koeffizientenvergleich: $a_1 + 2a_2 + a_3 = 1$, $a_1 - a_2 + a_3 = -2$ und $a_1 + a_2 = 3$
$\to (a_1, a_2, a_3) = (2, 1, -3)$
b) Lineare Unabhängigkeit :
$\sum_{i=1}^3 a_i p_i(x) = f_1 x^2 + f_2 x + f_3$ in ein Matrixform umschreiben

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

Weil $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ ist, existiert die Inverse $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$ und die Koeffizienten werden eindeutig bestimmt, d.h, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\mathcal{P}$ ist linear unabhängig.

c) $\sum_{i=1}^{3} b_i q_i(x) = g(x)$

$\rightarrow (2b_1 - b_2 + 3b_3)x^2 + (-b_1 + b_2 - 2b_3)x + b_1 + b_2 = 5x^2 - 3x + 1$

Koeffizientenvergleich: $2b_1 - b_2 + 3b_3 = 5$, $-b_1 + b_2 - 2b_3 = -3$ und $b_1 + b_2 = 1$

$\rightarrow (b_1, b_2, b_3) = (b_1, 1 - b_1, 2 - b_1)$

Mögliche Lösungen, z.B., $(b_1, b_2, b_3) = (1, 0, 1)$, $(2, -1, 0)$, oder $\cdots$

d) Lineare Unabhängigkeit :

Aus (c) sind b_2 und b_3 abhängig von b_1 $\rightarrow$ Die Polynome $\mathcal{Q}$ sind linear anhängig.

In der Tat, $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ und die Inverse $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$ existiert nicht.

1.3 Differentialoperator in Matrix-Vektorform

$\psi(x) = (a_1 + 2a_2 + a_3)x^2 + (a_1 - a_2 + a_3)x + a_1 + a_2$

Erste Ableitung : $\psi'(x) = 2(a_1 + 2a_2 + a_3)x + (a_1 - a_2 + a_3)$

In der Dastellung mit $p_i(x)$, d.h. $\psi'(x) = \sum_{i=1}^{3} b_i p_i(x)$

Koeffizientenvergleich: $b_1 + 2b_2 + b_3 = 0$, $b_1 - b_2 + b_3 = 2(a_1 + 2a_2 + a_3)$ und $b_1 + b_2 = a_1 - a_2 + a_3$

$\rightarrow b_1 = \frac{1}{3}(5a_1 + a_2 + 5a_3)$, $b_2 = -\frac{2}{3}(a_1 + 2a_2 + a_3)$, $b_3 = \frac{1}{3}(-a_1 + 7a_2 - a_3)$

$\rightarrow \mathbf{T} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & -2 \\ -1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$