2. Tutorium **für 21.10.2022**

2.1 Einsteinsche Summenkonvention

In der Einsteinschen Summenkonvention gilt, dass über doppelt auftretende Indizes innerhalb eines Produkts summiert wird. z.B. ein inneres Produkt der Vektoren wird als $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$ beschrieben und ein Produkt der Matrizen als $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \to c_{ij} = a_{ik} b_{kj}$. Schreiben Sie in Indexschreibweise mit der Einsteinschen Summenkonvention die folgenden Ausdrücke an. ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{x}$ sind n-dimensionale Vektoren und $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ sind $n \times n$ Matrizen.)
a) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$
b) $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x}$
c) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T \cdot \mathbf{C}$
d) $\mathrm{Sp}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

Anmerkung : Sofern nicht anders angegeben, wird die Einsteinsche Summenkonvention in den folgenden (und zukünftigen) Beispielen verwendet.

2.2 Kronecker-Delta

Das Kronecker-Delta ist durch

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

definiert. Berechnen (oder Vereinfachen) Sie die folgenden Ansdrücke:
a) $\delta_{ii}\delta_{jj}$ für $1 \leq i, j \leq n$
b) $\delta_{ij}\delta_{ij} + \delta_{ij}\delta_{ji}$ für $1 \leq i, j \leq n$
c) $\begin{vmatrix} \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jq} & \delta_{jr} \end{vmatrix} \delta_{jq}$ für $1 \leq i, j, q, r \leq 2$

2.3 Orthonormalbasis

Ein Vektor $\mathbf{x}$ lässt sich in einer Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ mit Koordinaten x_1, x_2 als $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ darstellen. Betrachten Sie eine neue Basis $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$. Die neue Basis ist durch $\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_j s_{ji}$ mit einer 2×2 Transformationsmatrix $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

definiert.
a) Zeigen Sie, dass $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ eine Orthonormalbasis ist.

b) Berechnen Sie, für $\phi = \pi/3$ und $x_1 = x_2 = 1$, die neuen Koordinaten (x'_1, x'_2) bezüglich der neuen Basis, d.h., $\mathbf{x} = x'_i \mathbf{e}'_i$.
c) Skizzieren Sie graphisch den Vektor, $\mathbf{x}$, und die neuen Basisvektoren, $\mathbf{e}'_1$ und $\mathbf{e}'_2$, im Koordinatensystem der ursprünglichen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.
d) Die Transformation der Koordinaten wird als eine lineare Transformation beschrieben, d.h,

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ und zeigen Sie, dass $\mathbf{T} = \mathbf{S}^T$.
e) Nehmen Sie an, dass die neuen Koordinaten mit dem inneren Produkt $x'_i = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{x}$ geschrieben werden. Finden Sie die Vektoren $\mathbf{f}_1$ und $\mathbf{f}_2$, die orthonormal mit einander (d.h. $\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = \delta_{ij}$) sind.

2.4 Nicht-Orthogonale Basis

Ein Vektor $\mathbf{x}$ lässt sich in einer Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ mit Koordinaten x_1, x_2 als $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_1 \ \ \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ darstellen. Betrachten Sie eine neue Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$. Die neue Basis ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Überprüfen Sie, dass die neue Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ nicht orthogonal ist.
b) Berechnen Sie, für $x_1 = x_2 = 2$, die neuen Koordinaten (a, b) bezüglich der neuen Basis, d.h., $\mathbf{x} = a\mathbf{f}_1 + b\mathbf{f}_2$.
c) Skizzieren Sie graphisch den Vektor, $\mathbf{x}$, und die neuen Basisvektoren, $\mathbf{f}_1$ und $\mathbf{f}_2$, im Koordinatensystem der ursprünglichen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.
d) Die Transformation der Koordinaten wird als eine lineare Transformation beschrieben, d.h,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ und zeigen Sie, dass $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$.
e) Finden Sie die Vektoren, $\mathbf{f}^*_1$ und $\mathbf{f}^*_2$, sodass die neuen Koordinaten als innere Produkte, $a = \mathbf{f}^*_1 \cdot \mathbf{x}$ und $b = \mathbf{f}^*_2 \cdot \mathbf{x}$, dargestellt werden. Die Vektoren, $\mathbf{f}^*_1$ und $\mathbf{f}^*_2$, sind die Basisvektoren im dualen Raum und erfüllen die Bedingungen $\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}^*_j = \delta_{ij}$.

Ankreuzbar: 1a-d, 2a-c, 3a-e, 4a-c, 4de