2. Tutorium - Lösungen **21.10.2022**

2.1 Einsteinsche Summenkonvention

Vorbemerkung: Beachte, dass hier die folgende Schreibweise verwendet wird: “$\mathbf{A} = (a_{ij})$”
Die 2×2 Matrix $\mathbf{A}$ hat vier Einträge: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.
Der Matrixeintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte lässt sich sauber so darstellen: $(\mathbf{A})_{ij} = a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{ij}$, also $(\mathbf{A})_{11} = a_{11}$, $(\mathbf{A})_{12} = a_{12}$, etc. Wenn es nur zwei freie Indizes gibt, und auch keine Gefahr der Vertauschung besteht (etwa wegen alphabetischer Reihenfolge der Indizes), wird das zuweilen verkürzt zu $\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.
a) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ ist ein Vektor : $\mathbf{d} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$
das i-te Element des Vektors $\mathbf{d}$: $d_i = a_j b_j c_i$ (ohne Summenkonvention : $d_i = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j c_i$)
b) $\mathbf{A} \cdot x$ ist ein Vektor ($\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$) und $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x}$ ist ein Skalar $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{x}$
Das i-te Element von $\mathbf{y}$: $y_i = a_{ij} x_j$, Skalarprodukt : $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{x} = y_i x_i = a_{ij} x_j x_i$
Anmerkung $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ (siehe Bsp.1.1)
c) $\mathbf{P} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ist eine Matrix und $\mathbf{Q} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T \cdot \mathbf{C} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{C}$ ist auch eine Matrix.
$p_{ij} = a_{ik} b_{kj}$ und $q_{ij} = p_{\ell i} c_{\ell j} = a_{\ell k} b_{ki} c_{\ell j}$
d) $\mathbf{P} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ist eine Matrix und $\mathrm{Sp}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathrm{Sp}(\mathbf{P})$ ist ein Skalar.
$p_{ij} = a_{ik} b_{kj}$ und $\mathrm{Sp}(\mathbf{P}) = p_{ii} = a_{ik} b_{ki}$

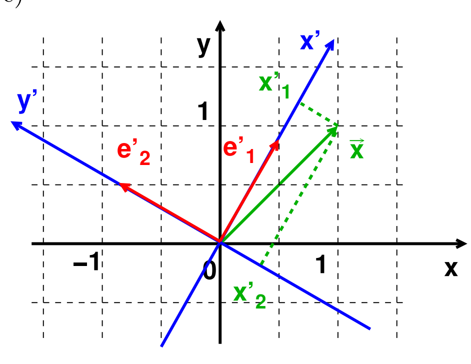
2.2 Kronecker-Delta

a) δ_{ii} ist die Spur einer Einheitsmatrix : $\delta_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ii} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n \rightarrow \delta_{ii}\delta_{jj} = n^2$
b) $\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ii} = n$ und $\delta_{ij}\delta_{ji} = \delta_{ii} = n \rightarrow \delta_{ij}\delta_{ij} + \delta_{ij}\delta_{ji} = 2n$.
c) $\begin{vmatrix} \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jq} & \delta_{jr} \end{vmatrix} \delta_{jq} = (\delta_{iq}\delta_{jr} - \delta_{ir}\delta_{jq})\delta_{jq} = \delta_{iq}\delta_{jr}\delta_{jq} - \delta_{ir}\delta_{jq}\delta_{jq} = \delta_{ij}\delta_{jr} - \delta_{ir}\delta_{jj} = \delta_{ir} - 2\delta_{ir} = -\delta_{ir}$

2.3 Orthonormalbasis

a) $\mathbf{e}'_1 = \cos\phi \mathbf{e}_1 + \sin\phi \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}'_2 = -\sin\phi \mathbf{e}_1 + \cos\phi \mathbf{e}_2$
Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \rightarrow \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$
$\mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_2 = -\cos\phi \sin\phi + \cos\phi \sin\phi = 0$ (orthogonal)
$\mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_1 = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$ und
$\mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}'_2 = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$ (normiert)
Alternativ : $\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_k s_{ki} \rightarrow \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \mathbf{e}_k s_{ki} \cdot \mathbf{e}_\ell s_{\ell j} = s_{ki}(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_\ell) s_{\ell j}$
$= s_{ki}\delta_{k\ell}s_{\ell j} = s_{ki}s_{kj} = \delta_{ij}$ (Orthonormal)
b) Inverse Transformation :
$\mathbf{e}_1 = \cos\phi \mathbf{e}'_1 - \sin\phi \mathbf{e}'_2$ und $\mathbf{e}_2 = \sin\phi \mathbf{e}'_1 + \cos\phi \mathbf{e}'_2$
Wenn $x_1 = x_2 = 1$ und $\phi = \pi/3$,
$\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = (\cos\phi + \sin\phi)\mathbf{e}'_1 + (\cos\phi - \sin\phi)\mathbf{e}'_2$
$x_1 = \cos\phi + \sin\phi = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ und $x_2 = -\sin\phi + \cos\phi = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$
Anmerkung : Der Vektor x ist invariant bei der Basistransformation. Nur die Darstellung ändert sich weil die Koordinaten von der Basis abhängen. ($\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i = x'_i \mathbf{e}'_i$).

c)



d) $s_{ki}s_{kj} = s_{ik}s_{jk} = \delta_{ij} \rightarrow \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$
Inverse Transformation : $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}'_j s_{ij}$
$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i = x_i \mathbf{e}'_j s_{ij} = x'_j \mathbf{e}'_j \rightarrow x'_j = x_i s_{ij} \equiv t_{ji} x_i \rightarrow t_{ij} = s_{ji}$ oder $\mathbf{T} = \mathbf{S}^T$

e) $\mathbf{x} = x_i'\mathbf{e}_i' \rightarrow \mathbf{e}_j' \cdot \mathbf{x} = x_i'(\mathbf{e}_j' \cdot \mathbf{e}_i') = x_i'\delta_{ji} = x_j' \rightarrow \mathbf{f}_i = \mathbf{e}_i'$
Anmerkung : Für Orthonormalbasis, wird die Basistransformation mit der Identität $\mathbf{I} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_i$ oder $\mathbf{e}_i'\mathbf{e}_i'$ durchgeführt.
Transformation der Basisvektoren : $\mathbf{e}_i' = \mathbf{I} \cdot \mathbf{e}_i' = (\mathbf{e}_j\mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_i' = \mathbf{e}_j(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i') = \mathbf{e}_j s_{ji}$
Transformation eines Vektors : $\mathbf{x} = x_i\mathbf{e}_i = \mathbf{I} \cdot (x_i\mathbf{e}_i) = (\mathbf{e}_j'\mathbf{e}_j') \cdot (x_i\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_j'(x_i\mathbf{e}_j' \cdot \mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_j'(x_i t_{ji}) = \mathbf{e}_j'x_j'$
Im Skriptum ist die Basistransformation als $\mathbf{A} = \mathbf{e}_i'\mathbf{e}_i^\dagger$ (Eq. 1.106) dargestellt. Dieser Operator ersetzt den Basisvektor $\mathbf{e}_i$ mit $\mathbf{e}_i'$ (d.h, $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i'$). Wenn auf die Basisvektoren $\mathbf{e}_i$ angewendet, ist die Transformation eine Basistransformation. Wenn auf einen beliebigen Vektor $\mathbf{x}$ angewendet, ist die Transformation nicht mehr die Basistransformation aber wird der Vektor in einen anderen Vektor transformiert.

2.4 Nicht-Orthogonale Basis

a) $\mathbf{f}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$
mit der Orthonormalbasis $(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij})$
$\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 = 2 + 3 = 5$ (nicht orthogonal)
b) Inverse Transformation :
$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{5}(3\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2)$ und $\mathbf{e}_2 = -\frac{1}{5}(\mathbf{f}_1 - 2\mathbf{f}_2)$
Wenn $x_1 = x_2 = 2$, $\mathbf{x} = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 = \frac{1}{5}(4\mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2)$
$\rightarrow a = 4/5$ und $b = 2/5$
d) $\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S}^{-1}$
$\rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
Koeffizientenvergleich : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
$\rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$

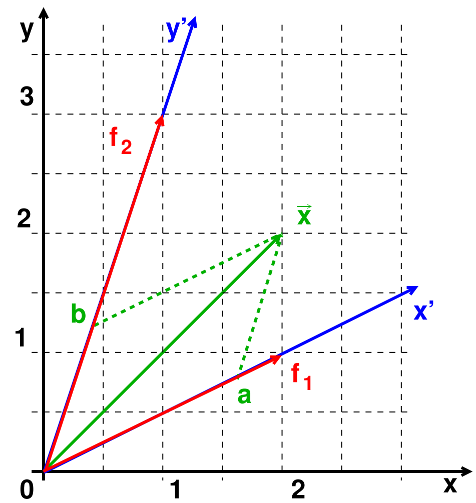


Abb.2.4c

e) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow a = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $b = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
$\mathbf{f}_1^* = \frac{1}{5}(3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$, $\mathbf{f}_2^* = \frac{1}{5}(-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)$
$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1^* \\ \mathbf{f}_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S}\mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j^* = \delta_{ij}$

Graphische Lösung :
Länge : $\overline{OA} = x_1'|\mathbf{f}_1|$, $\overline{OB} = |\mathbf{f}_1|$
Wenn $\mathbf{f}_2$ und $\mathbf{f}_1^*$ orthogonal $(\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_1^* = 0)$ sind,
Länge : $\overline{OA'} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}_1^*/|\mathbf{f}_1^*|$, $\overline{OB'} = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1^*/|\mathbf{f}_1^*|$
Der Quotient der Länge : $\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}$
$\rightarrow x_1' = \frac{\overline{OA}}{|\mathbf{f}_1|} = \frac{\overline{OA'}}{|\mathbf{f}_1|}\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{f}_1^*}{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1^*}$
Wenn $\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1^* = 1$, $a = \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}_1^*$
In ähnlicher Weise, wenn $\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2^* = 1$, gilt $b = \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}_2^*$.
Anmerkung : Die Basisvektoren im dualen Raum werden oft mit dem hochgestellten Index bezeichnet ($\mathbf{f}_i^* = \mathbf{f}^i$). Entsprechend werden die Projektion auf den Vektoren (oder die Koordinaten a, b) auf mit dem hochgestellten Index bezeichnet ($a = \mathbf{f}^1 \cdot \mathbf{x} = x^{1\prime}$, $b = \mathbf{f}^2 \cdot \mathbf{x} = x^{2\prime}$). In ähnlicher Weise kann der Vektor $\mathbf{x}$ auch in der Basis $\{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$ als $\mathbf{x} = (\mathbf{f_i} \cdot \mathbf{x})\mathbf{f}^i$ dargestellt werden (Nachrechnen!). In Indexschreibweise werden die Projektion als die Koordinaten mit tiefgestellten Index beschrieben $x_i' = \mathbf{f_i} \cdot \mathbf{x}$.

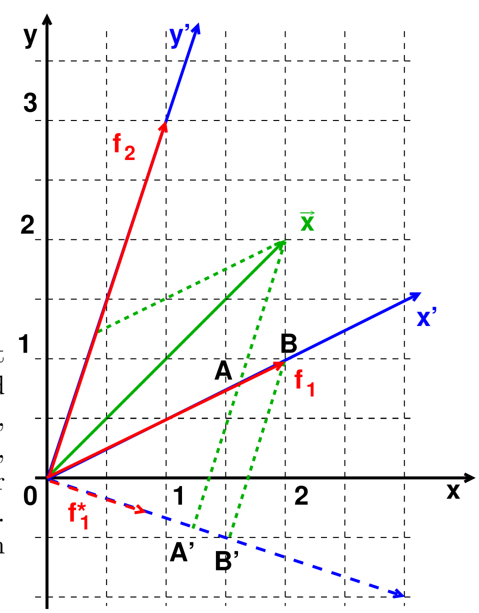


Abb.2.4e

Anmerkung 2 : Für nicht-orthogonale Basis, ähnlich wie Orthonormalbasis, wird die Basistransformation mit der Identität $\mathbf{I} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}^i$ oder $\mathbf{f}_i\mathbf{f}^i$ durchgefühlt.
Transformation der Basisvektoren : $\mathbf{f}_i = \mathbf{I} \cdot \mathbf{f}_i = (\mathbf{e}_j\mathbf{e}^j) \cdot \mathbf{f}_i = \mathbf{e}_j(\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{f}_i) = \mathbf{e}_j s^j{}_i$
Transformation eines Vektors : $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i = \mathbf{I} \cdot (x^i\mathbf{e}_i) = (\mathbf{f}_j\mathbf{f}^j) \cdot (x^i\mathbf{e}_i) = \mathbf{f}_j(x^i\mathbf{f}^j \cdot \mathbf{e}_i) = \mathbf{f}_j x^i t^j{}_i = \mathbf{f}_j x^{i\prime}$