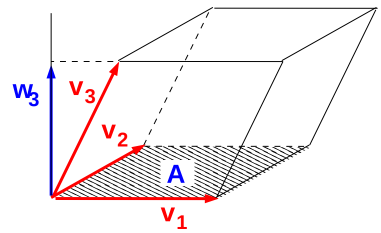
3. Tutorium - Lösungen **28.10.2022**

3.1 Dualraum



a) Grundfläche : $A = |\vec{A}| = |\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|$
Höhe : $w_3 = |\mathbf{w}_3| = |\mathbf{v}_3 \cdot \vec{A}|/A$
Volumen : $V = Aw_3 = |\mathbf{v}_3 \cdot \vec{A}| = (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3 = 3$
Bemerkung : $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3 = (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) \cdot \mathbf{v}_1 = (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2$
b) $\det \mathbf{S} = 3 = V$

c) $\mathbf{v}^i \cdot \mathbf{v}_j = \delta^i_j$
$\mathbf{v}^1$ ist orthogonal zu $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3 \to \mathbf{v}^1 = c\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$, Normierung $\mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{v}_1 = cV = 1 \to c = 1/V$
$\mathbf{v^1} = \frac{1}{3}(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3)$, In ähnlicher Weise, $\mathbf{v^2} = \frac{1}{V}\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{v^3} = \frac{1}{V}\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \frac{1}{3}(-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3)$
Anmerkung : Definition der dualen Basisvektoren, $\mathbf{v}^i \cdot \mathbf{v}_j = \delta^i_j$, in Matrixschreibweise :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}^1 \\ \mathbf{v}^2 \\ \mathbf{v}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{I} \to \mathbf{T} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \mathbf{S} = \mathbf{I}$$

In orthonormalen Systemen sind die dualen Basisvektoren gleich als die ursprünglichen Basisvektoren, d.h. $\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i$ und $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta^i_j$.

$$\to \mathbf{TS} = \mathbf{I} \to \mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1} \text{ oder } \begin{pmatrix} \mathbf{v}^1 \\ \mathbf{v}^2 \\ \mathbf{v}^3 \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^3 \end{pmatrix}$$

Anmerkung 2 : Hier $\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix}$ ist eine 1×3 Matrix, deren Elemente Vektoren sind. Jeder Vektor kann in einer Basis als, z.B., $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$ bezeichnet werden. In solchen Ausdrücken werden die Basisvektoren oft abgekürzt und der Vektor wird als eine 3×1 Matrix $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ein Spaltenvektor) oder als eine 1×3 Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ein Zeilenvektor) beschrieben. Nur in dieser abgekürzten Schreibweise muss man die Transposition einer Matrix (eines abgekürzten "Vektors") beachten. Es gibt keine Transposition für den nicht-abgekürzten Vektor $\mathbf{v}_1$. Da in diesem Semester die Basistransformation ein Hauptthema ist, wird ein Vektor in verschieden Basen dargestellt. Deswegen ist es empfohlen, immer die Basisvektoren explizit zu schreiben und keine abgekürzte Form zu verwenden.
d) $V^* = \det(\mathbf{S}^{-1}) = \frac{1}{3}$
Alternativ : $V = \det(\mathbf{S})$ und $V^* = \det(\mathbf{S}^{-1}) = 1/V$.

3.2 Levi-Civita Symbol

a) Wenn $i = j$, $\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j = 0$.

Wenn (i, j, k) eine gerade Permutation von 1,2,3 ist, $\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_k$.
($\{\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_k\}$ ist eine rechtshändige Orthonormalbasis.)

Wenn (i, j, k) eine ungerade Permutation von 1,2,3 ist, $\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j = -\mathbf{a}_k$.
($\{\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_k\}$ ist eine linkshändige Orthonormalbasis.)

$\to \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j = \varepsilon_{ijk}\mathbf{a}_k$.
b) $\mathbf{d} = d_i\mathbf{e}_i$ und $\mathbf{B} = b_i\mathbf{e}_i$ in einer zeitunabhängigen und rechtshändigen Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

$\frac{d}{dt}\mathbf{d}(t) = \gamma\mathbf{d}(t) \times \mathbf{B} \to \frac{dd_i}{dt}\mathbf{e}_i = (d_i\mathbf{e}_i) \times (b_j\mathbf{e}_j) = d_ib_j(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) = d_ib_j\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k$
c) $\det(\mathbf{E}) = (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k = \varepsilon_{ij\ell}\mathbf{e}_\ell \cdot \mathbf{e}_k = \varepsilon_{ij\ell}\delta_{\ell k} = \varepsilon_{ijk}$
Alternativ :
Wenn $i = j$, z.B. $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \det\mathbf{E} = 0$
In ähnlicher Weise, $\det\mathbf{E} = 0$ wenn $i = j$, $j = k$, oder $k = i$.
Wenn zwei Spalten in der Matrix $\mathbf{E}$ vertauscht werden, ändert die Determinante ihr Vorzeichen,
d.h, wenn i, j, k eine gerade Permutation von 1,2,3 ist, $\det\mathbf{E} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = 1$
und, wenn i, j, k eine ungerade Permutation von 1,2,3 ist, $\det\mathbf{E} = -\det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = -1$
Zusammenfassung : $\det(\mathbf{E}) = \varepsilon_{ijk}$
d) i-te Elemente des Vektors $\mathbf{e}_1 : \delta_{i1}$, i-te Elemente des Vektors $\mathbf{e}_2 : \delta_{i2}$, i-te Elemente des Vektors $\mathbf{e}_3 : \delta_{i3}$
$\to$ i-te Elemente des Vektors $\mathbf{e}_j : \delta_{ij} \to \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{pmatrix}$
e) Aus c und d, $\det\begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijk}$
Wenn zwei Zeilen in der Matrix $\mathbf{E}$ vertauscht werden, z.B., $\det\begin{pmatrix} \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{pmatrix} = -\varepsilon_{ijk}$
Im Allgemeinen, wenn ℓ, m, n eine gerade Permutation von 1,2,3 ist, $\det\begin{pmatrix} \delta_{\ell i} & \delta_{\ell j} & \delta_{\ell k} \\ \delta_{mi} & \delta_{mj} & \delta_{mk} \\ \delta_{ni} & \delta_{nj} & \delta_{nk} \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijk}$
und, wenn ℓ, m, n eine ungerade Permutation von 1,2,3 ist, $\det\begin{pmatrix} \delta_{\ell i} & \delta_{\ell j} & \delta_{\ell k} \\ \delta_{mi} & \delta_{mj} & \delta_{mk} \\ \delta_{ni} & \delta_{nj} & \delta_{nk} \end{pmatrix} = -\varepsilon_{ijk}$
wenn $\ell = m$, $m = n$, oder $n = \ell$, $\det\mathbf{M} = 0$ (siehe c).
$\to \det\mathbf{M} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\ell mn}$
f) Aus e), $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \det\begin{pmatrix} \delta_{ik} & \delta_{i\ell} & \delta_{im} \\ \delta_{jk} & \delta_{j\ell} & \delta_{jm} \\ \delta_{kk} & \delta_{k\ell} & \delta_{km} \end{pmatrix}$
$= \delta_{ik}\delta_{j\ell}\delta_{km} + \delta_{jk}\delta_{k\ell}\delta_{im} + \delta_{kk}\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{ik}\delta_{k\ell}\delta_{jm} - \delta_{jk}\delta_{i\ell}\delta_{km} - \delta_{kk}\delta_{j\ell}\delta_{im}$
$= \delta_{im}\delta_{j\ell} + \delta_{j\ell}\delta_{im} + 3\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{jm}\delta_{i\ell} - 3\delta_{j\ell}\delta_{im} = \delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{j\ell}\delta_{im}$

3.3 Orthogonalprojektion

a) In der Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ wird ein Vektor als $\mathbf{x} = x_i\mathbf{e}_i$ dargestellt, wobei $x_1\mathbf{e}_1$ (oder $x_2\mathbf{e}_2$) die Orthogonalprojektion des Vektors $\mathbf{x}$ auf den Basisvektor $\mathbf{e}_1$ (oder $\mathbf{e}_2$), d.h. $\mathbf{x} = x_i\mathbf{e}_i = \hat{\mathbf{P}}_1\mathbf{x} + \hat{\mathbf{P}}_2\mathbf{x}$
Ersetzung $\mathbf{x} = \mathbf{f}_i \to \mathbf{f}_i = \hat{\mathbf{P}}_1\mathbf{f}_i + \hat{\mathbf{P}}_2\mathbf{f}_i$.
Da $\hat{\mathbf{P}}_j = \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j$, $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{f}_i) + \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{f}_i) = \mathbf{e}_j(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{f}_i)$. $\to s_{ji} = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{f}_i$
b) $\hat{\mathbf{Q}}_i = \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}_i$,
In der Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, $\mathbf{x} = x_i\mathbf{e}_i$ und $\mathbf{y}_i = \hat{\mathbf{Q}}_i(x_k\mathbf{e}_k) = x_k\mathbf{f}_{\underline{i}}(\mathbf{f}_{\underline{i}} \cdot \mathbf{e}_k) = x_k\mathbf{f}_{\underline{i}}s_{k\underline{i}}$ (Wir notieren, dass für unterstrichene Indizes (z.B. $\underline{i}$) die Einsteinsche Summenkonvention nicht gilt.)
$y_{ij} = \mathbf{y}_i \cdot \mathbf{e}_j = x_ks_{k\underline{i}}(\mathbf{f}_{\underline{i}} \cdot \mathbf{e}_j) = x_ks_{j\underline{i}}s_{k\underline{i}} \to q_{ijk} = s_{j\underline{i}}s_{k\underline{i}}$
$\hat{\mathbf{Q}}_1 \to \mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} q_{111} & q_{112} \\ q_{121} & q_{122} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
$\hat{\mathbf{Q}}_2 \to \mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} q_{211} & q_{212} \\ q_{221} & q_{222} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{12} & s_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
Alternativ : $\hat{\mathbf{Q}}_i$ ist die Orthogonalprojektion auf den Vektor $\mathbf{f}_i$, d.h., $\hat{\mathbf{Q}}_i\mathbf{x} = x'_{\underline{i}}\mathbf{f}_{\underline{i}}$ (siehe Bsp.2.3)
$\to \mathbf{y}_i = \hat{\mathbf{Q}}_i\mathbf{x} = x'_{\underline{i}}\mathbf{f}_{\underline{i}} = t_{\underline{i}k}x_k\mathbf{e}_js_{j\underline{i}}$ mit $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$
$y_{ij} = t_{\underline{i}k}x_ks_{j\underline{i}} = s_{k\underline{i}}x_ks_{j\underline{i}} \to q_{ij} = s_{k\underline{i}}s_{j\underline{i}}$
Anmerkung : $\hat{\mathbf{Q}}_i$ ist ein Operator und $\mathbf{Q}_i$ ist die Matrixdarstellung des Operators in der Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.
c) In der Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$, $\mathbf{x} = x'_i\mathbf{f}_i$ und $\mathbf{y}_i = \hat{\mathbf{Q}}_i(x'_k\mathbf{f}_k) = x'_k\mathbf{f}_{\underline{i}}(\mathbf{f}_{\underline{i}} \cdot \mathbf{f}_k) = x'_k\mathbf{f}_{\underline{i}}\delta_{\underline{i}k}$

$\rightarrow y'_{ij} = \mathbf{y}_i \cdot \mathbf{f}_j = x'_k \delta_{\underline{i}k} (\mathbf{f}_{\underline{i}} \cdot \mathbf{f}_j) = x'_k \delta_{\underline{i}k} \delta_{\underline{i}j} \rightarrow q'_{ijk} = \delta_{k\underline{i}} \delta_{j\underline{i}}$

$\hat{\mathbf{Q}}_1 \rightarrow \mathbf{Q}'_1 = \begin{pmatrix} q'_{111} & q'_{112} \\ q'_{121} & q'_{122} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{11} \\ \delta_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\hat{\mathbf{Q}}_2 \rightarrow \mathbf{Q}'_2 = \begin{pmatrix} q'_{211} & q'_{212} \\ q'_{221} & q'_{222} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{12} \\ \delta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{12} & \delta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Alternativ : $\mathbf{y}_i = \hat{\mathbf{Q}}_i \mathbf{x} = x'_{\underline{i}} \mathbf{f}_{\underline{i}} = x'_{\underline{i}} \delta_{\underline{i}j} \mathbf{f}_j \rightarrow y'_{ij} = x'_{\underline{i}} \delta_{\underline{i}j} = x'_k \delta_{\underline{i}k} \delta_{\underline{i}j} \rightarrow q'_{ijk} = \delta'_{\underline{i}k} \delta_{\underline{i}j}$

Anmerkung : $\hat{\mathbf{Q}}_i$ ist ein Operator und $\mathbf{Q}'_i$ ist die Matrixdarstellung des Operators in der Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$.
Für einen Operator $\hat{\mathbf{Q}}_i$ hängt die Matrixdarstellung von der Basis ab (Vergleich das Ergebnis mit (b)).

d)

$\mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}'_1 \cdot \mathbf{S}^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_1$

$\mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}'_2 \cdot \mathbf{S}^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_2$

alternativ : $q_{ijk} = \mathbf{e}_j \cdot \hat{\mathbf{Q}}_i \cdot \mathbf{e}_k = s_{j\ell} \mathbf{f}_\ell \cdot \hat{\mathbf{Q}}_i \cdot \mathbf{f}_m s_{km} = s_{j\ell} q'_{i\ell m} s_{km}$

Anmerkung : $\mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}'_i \cdot \mathbf{S}^T = \mathbf{Q}_i$ ist eine Basistransformation in der Matrixdarstellung des Operators $\hat{\mathbf{Q}}_i$.

e) $(q_{1jk} + q_{2jk}) = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Anmerkung : Die Matrixdarstellung der Identität ist unabhängig von der Basis,
d.h. $\mathbf{Q}'_1 + \mathbf{Q}'_2 = \mathbf{S} \cdot (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) \cdot \mathbf{S}^T = \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^T = \mathbf{I}$

f) In Matrixschreibweise

$(2q_{1ij} - q_{2ij})(2q_{1jk} - q_{2jk}) \rightarrow (2\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2) \cdot (2\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2) = 4\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_1 - 4\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_2$

Da $\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2$ und $\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 = 0$,

$((2q_{1ij} - q_{2ij})(2q_{1jk} - q_{2jk})) = 4\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}$